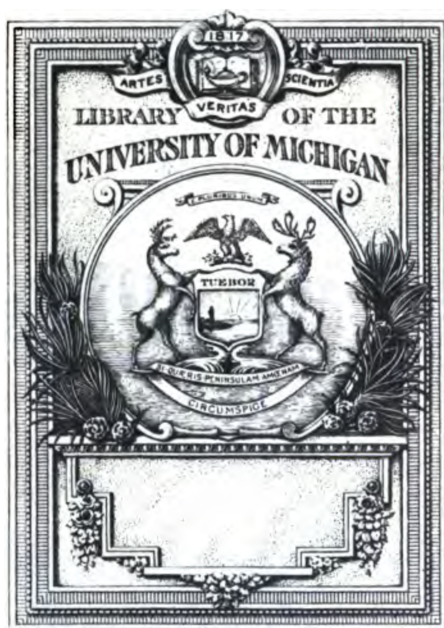
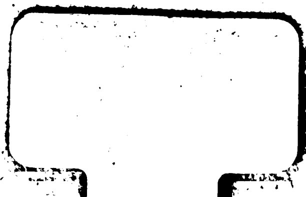

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



J B

Inſtitutiones Mathematicae

Ab

Adamo Matth. Chmel

In Caeſ. Regio Lyceo Lincenſi Matheſeos purae et applicatae Profeſſore publ. ordin.

editae.

Tomus Primus

continens

Prolegomena Matheſeos Univerſae

et

Arithmeticam

tam Elementarem, quam Univerſalem

ſeu

Algebram.

Lincii, apud Cajetanum Haslinger 1807.

Adoleſcentibus eorumque aetati conveniunt Diſciplinae Mathematicae, quae animam praeparant et defaecant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

Plato apud Theonem Smyrnaeum,
Cap. I. p. 20.

Prolegomena

Matheſeos Univerſae

Index Capitum.

Prolegomena Mathefeos Univerfae.

Elementa Mathefeos Generalis.

Pars Prima.

Arithmetica Elementaris.

Pars Secunda.

Arithmetica Universalis, seu Elementa Algebrae.

Elementa Algebrae.

Sectio Prima. De Primis Calculis Algebraicis.

Sectio Secunda. De Quantitatum Potentiis, et Radicibus.

Sectio Tertia. De Calculis in Fractionibus Decimalibus, et Sexagesimalibus; item in numeris mixtis heterogeneis.

Sectio Quarta. De Aequationibus seu de Algebra in sensu stricto vel proprio.

Sectio Quinta. De Variis Quantitatum Relationibus et Affectionibus.



Prolegomena
Matheſeos univerſae.

I.

De Objecto Matheſeos, ejusque diverſis partibus.

§. 1. *Diverſa* dicuntur, quatenus in uno eorum aliquid eſt, quod in altero non eſt; *eadem*, quatenus non ſunt diverſa.

§. 2. Igitur eadem poſſunt ſibi mutuo ſubſtitui (unum alteri), et ea, quorum unum alteri ſubſtitui poteſt, eadem ſunt.

§. 3. *Homogenea* audiunt, quatenus reſpicitur id, quod in illis idem eſt; *heterogenea*, quatenus ea ſpectantur, quae in illis diverſa ſunt (vel res ejusdem generis, ſpeciei, et diverſi generis, diverſae ſpeciei).

§. 4. Determinatio *varii* in aliqua re (in objecto), et modi, quo conjunctio (Synthesis) ejusdem in illa cogitatur (concipitur), dicitur ejus *Qualitas* (Beschaffenheit). Determinatio, quoties ad producendum quodpiam objectum illi aliquid homogeneum secum conjungi debeat, vocatur ejus *Quantitas*. V. g. quod linea longitudinem habeat, ad ejus qualitatem spectat; dum autem effero, illam 9 pedes longam esse; quantitatem illius determino.

§. 5. Quidquid quantitate gaudet, vocatur *Quantum*. V. g. Linea. Est ergo quantum subjectum, cui quantitas, tanquam praedicatum convenit.

§. 6. *Mathematica* seu *Mathesis* vocatur scientia *quantorum* (illa rationalis cognitio, quae ex constructione notionum oritur).

§. 7. Illa pars Matheseos, quae ab omnibus objectis realibus abstrahit, seu quae quantitatem puram seu a materia singulari et sensibili abstractam considerat, appellatur *pura*, ea autem, quae circa realia objecta versatur, dicitur Mathesis *applicata*.

§. 8. Ea pars Matheseos *purae*, quae generatim conjunctiones homogenei possibiles investigat, quibus quantum in genere produci, et quantitas generatim determinari potest, nullo respectu quantorum determinatae (certae) qualitatis habito, dicitur *Mathesis generalis* (allgemeine Gröfsenlehre), ea pars autem quae quanta qualitatis datae ut objecta pertractat, *Mathesis specialis* (besondere Gröf-

ſenlehre). Illa igitur fundamentum eſt et hujus, et totius Matheſeos applicatae.

§. 9. Ad Matheſin *generalem* pertinet:

1. *Additio*, et *Subtractio generalis*, cum quantum quodpiam vel ex diverſis homogeneis conjungitur (colligitur), vel de eo aliquid (pars aliqua) aufertur.

2. *Arithmetica*, ſeu ſcientia numerorum.

§. 10. Ad Matheſin *ſpecialem* pertinet:

1. *Geometria*, vel ſcientia quantitatis continuae, ſive ſpatii, extenſionis.

2. *Trigonometria*, vel ſcientia ſupputandi latera et angulos trianguli cujuspiam.

§. 11. Matheſis *pura* igitur ſequentes tres ſcientias complectitur: 1. *Matheſim generalem*, quae praeter *Additionem* et *Subtractionem generalem*, in Arithmetica conſiſtit; 2. *Geometriam*; 3. *Trigonometriam*.

§. 12. Ad Matheſim *applicatam* pertinet:

1. *Arithmetica practica* (die praktiſche Rechenkunſt), id eſt applicatio Arithmetices ad praecipuos ſupputandi caſus, qui in vita communi dari poſſunt.

2. *Geodaeſia* (Landmeſskunſt), id eſt applicatio Geometriae ad diſtantias, altitudines et ſuperficies ſuper terra dimetiendas.

Praeter has ambas ſcientias, quarum Elementa jam Matheſi purae adnumerari ſolent, Matheſis *ap-*

plicata hodierno die ſequentes quattuor ſcientias principales continet:

I. *Scientias mechanicas*, de aequilibro et de motu (die mechaniſchen Wiſſenſchaften, vom Gleichgewichte und von der Bewegung). Illuc pertinet:

1. *Statica* (Statik), id eſt ſcientia de aequilibrio ſolidorum (corporum firmorum, etiam Geoſtatica, Wiſſenſchaft vom Gleichgewichte der feſten Körper).

2. *Mechanica* (proprie dicta, Mechanik), de motu ſolidorum.

3. *Hydroſtatica*, de aequilibrio fluidorum ponderantium, (vom Gleichgewichte der ſchweren flüſſigen Körper).

4. *Hydraulica*, de motu fluidorum ponderantium.

5. *Aerometria*, de aequilibro et motu aeris, tanquam fluidi ponderantis, et elaſtici.

II. *Scientias opticas* (die optiſchen Wiſſenſchaften), de luce vel viſione; huc ſpectat:

1. *Optica* (propria), de luce, quae ab objecto linea recta ad oculum propagatur.

2. *Catoptrica*, de luce reflexa.

3. *Dioptrica*, de luce refracta.

4. *Perſpectiva*, de delineatione corporum in plano, prout haec nobis in diſtantia data et ſitu dato pro oculis noſtris apparent.

Huc quoque et *Photometria* et *Pyrometria*, de luminis (lucis) et ignis viribus referri poſſent. Sed hae adhuc in cunis jacent.

III. *Scientias astronomicas* (die astronomischen Wissenschaften), de corporibus coelestibus, et de terra. Ad has refertur:

1. *Astronomia*, de motu, magnitudine, et nexu (Systemate) corporum mundanorum.

2. *Geographia*, de figura (forma) et magnitudine terrae, et de situ locorum inter se.

3. *Chronologia*, de determinando tempore ope astronomiae, et de Constructione Calendarii.

4. *Gnomonica*, de determinatione temporis ope horologiorum solarium, lunarium, et stellarium.

IV. *Scientias architectonicas* (Bau- und Kriegswissenschaften), *vel scientias aedificandi et bellandi*. Ad has pertinet:

1. *Architectura civilis* (die bürgerliche Baukunst), de construendis, ordinandis et ornandis aedificiis (von der Aufführung, Einrichtung und Verzierung der Gebäude). Huic etiam adnumerantur:

a. *Architectura hydraulica* (Wasserbau oder die Hydrotechnik), de quavis aedificatione sub aquis ut: aedificatio molium, canalis, pontilis, (architectura molinaria, canalis, pontilis), directio et flexio fluminum, exsiccatio paludum, praeparatio fluviorum navigabilium, fossio navigabilium canalium, munimentatio et purgatio portuum etc.

b. *Architectura navalis* (die Schiffbaukunst).

2. *Pyrotechnia* (die Artillerie), de tormentis, aliisque machinis oppugnatoriis et defensoriis.

3. *Architectura militaris*, vel *fortificatoria* (die Kriegsbaukunſt oder Fortification), de aedificandis, oppugnandis (aggrediendis) et defendendis munimentis (vom Bau, Angriff, und Vertheidigung der Feſtungswerke).

Scientiae architectonicae interea non ſunt merae mathematicae, verum, licet ipſae cognitiones mathematicas neceſſario ſupponant; multas illae tamen alienas ſcientias (notiones) praeterea requirunt, quae trans territorium Matheſeos jacent, praeterea que jam magna de parte in arte ac ſenſu aeſthetico (guſtu) nituntur. Idem etiam de Muſica valet, quae olim ut praecipua Matheſeos pars ſpectabatur.

§. 13. Matheſis denique dividitur in *elementarem* (gemeine), et *ſublimiorem* (höhere). *Elementaris* ad principia duntaxat vel mera elementa reſtricta eſt; ſublimior ibi incipit, ubi illa deſinit, atque indagationes ſuas in infinitum continuat.

§. 14. *Arithmetica elementaris* ad meras faciliores quantorum et numerorum conjunctiones (relationes) reſtringitur, v. g. in doctrina de potentiis ultra radicis quadraticae et cubicae extractionem non extenditur. Nec ſtricte accepta negativarum quantitatum reſpectum habet. Interea in determinandis ejus propriis limitibus multa adhuc arbitraria ad libitum manent. Ad Arithmeticam *ſublimiorem* pertinet: 1. *Algebra*; 2. *Calculus differentialis*; 3. *Calculus integralis*, quorum definitiones hic non inducuntur.

§. 15. Inter elementarem et ſublimiorem Geometriam a Mathematicis certi termini circumſcripti

ſunt. *Geometria elementaris* in diſciplina linearum tantum ad lineam rectam, et lineam circularem (circulum) reſtricta eſt, ac in doctrina de ſuperficiebus et ſolidis tantum ad ea, quae per lineas rectas et circulares demonſtrari queunt. Ad *ſublimiorem Geometriam* autem omnes reliquae curvae lineae ſuperficies et id genus ſolida referuntur.

§. 16. Ad *Trigonometriam elementarem* omnia ea ſpectant, quae ſola Geometria et Arithmetica elementari erui et deduci poſſunt; omnia reliqua ad *ſublimiorem.* In quavis diſciplina Matheſeos applicatae vero ad ejus *elementarem partem* ea ſolum referuntur, quae ope elementaris Arithmeticae, Geometriae et Trigonometriae exponi et probari queunt; caetera autem reliqua ad ejus *partem ſublimiorem.*

§. 27. *Modus* probandi (demonſtrandi, Beweisart), quo in Matheſi utimur, aut *ſyntheticus*, aut *analyticus* eſt. In illo propoſitiones ipſae pro notis jam ſumuntur (pro certis jam habentur), atque eo, quod per ſimpliciores propoſitiones, quae illis pro fundamento ſerviunt, probentur, ſolum de earum certitudine certi fieri ſtudemus. In hoc autem per probationem, id eſt probando vel demonſtrando, propoſitionem ipſam primum detegere (invenire) ſtudemus. In Matheſi elementari vulgo penitus *Synthetico*, in ſublimiori vero hodierno die ſolo *analytico* modo demonſtrandi utuntur Mathetae.

Ex utroque componere licet mixtum, qui tradendis elementis ſcientiarum accommodatiſſimus eſt (Kaeſtner. §. 37. p. I.).

§. 18. Illa pars Matheseos purae, quae methodo analytica utitur, ac proinde principia generalia artis inveniendi mathematicae continet, nuncupatur *Analysis*. Dividitur haec in *Analysim finitorum* et *infinitorum*, rectius autem in elementarem et sublimiorem.

Ad *elementarem* spectat Algebra, atque ea ex Geometria et Trigonometria sublimiori, quae ex Algebra deducuntur. Ad *sublimiorem* Calculus Differentialis et Integralis, una cum omnibus ex Geometria et Trigonometria sublimiori, quae ope ipsius eruuntur. Analysis, ac praecipue sublimior summum cacumen et summus flos Matheseos purae est. Per illam rationi humanae jam via ad omnes possibiles inventiones (deductiones) mathematicas prorsus aperta est, ac ab illius illimitata (infinita) amplificatione simul haec totius Matheseos applicatae sublimioris dependet.

II.

De Utilitate Matheseos.

§. 19. Jam ex ipsa data delineatione Matheseos videri potest, quantam illa copiam (thesaurum) cognitionum necessariarum contineat. Ejus influxus in satisfactionem nostrorum (requisitorum) maxime necessariorum, ac in commoda et gratiositates vitae humanae, illam cuivis nationi rectis moribus praeditae respectu et aestimatione dignam reddit, atque propagatio ejus notionum et doctrinarum igitur jam ex hoc fundamento realis est humanae prosperitatis et salutis promotio. Cuivis autem studioso (filio musarum) jam absolute necessaria est Mathesis. Utilitas, quam illi mathesis

procurat, summatim ad haec momenta reduci potest:

1. Exhibet illi haec copiam *veritatum*, de quibus perfectissima certitudine intelligere potest, quod sint merae *veritates*.

2. *Absque Mathesi nullum solidum Studium Physices systematicum possibile est.* Nam scientiae mechanicae, opticae, et astronomicae jam in se maxima de parte partem maximi momenti Physices efficiunt, et quidem eam, in qua perfecta certitudine gloriari queat.

3. Nulla alia scientia nobis humani intellectus amplitudinem adeo notificat (manifestat), ut Mathesis.

4. Industriam (operam, conatum), qua ejus notitiam quaerimus, et familiaritatem nobis comparamus, jam abundanter sinceris inaestimabilibus gaudiis ac oblectationibus compensat, quas suis cultoribus adfert. Hocce ei testimonium unusquisque de illa peritus dederat.

5. Utilitas illius vero maxima haec est, quod nulla scientia intellectum adeo acuat, ac in ferendis exactis judiciis (in solide dijudicando), imo in inveniendis ipsis veritatibus adeo exerceat, ut illa. Fructus (commodi) hujus autem tum tantum participes simus, si illam secundum methodum mathematicam strictam addiscamus (cique studeamus), quae etiam *Euclidea* appellari solet, quia hanc Euclides in suis elementis strictissime secutus est. Quaevis levior (accommodatior) via, quae hic quaeri solet, tironem a cognitione (perspectione in proprium ingenium, et indolem) proprii in-

genii et indolis Matheseos abducit, illique nullatenus est levamini, sed verum gravamen.

III.

De Methodo mathematica.

§. 20. *Tituli cardinales*, sub quibus doctrinae mathematicae (Lehren, mathemata) inducuntur, sunt: *definitiones*, *propositiones*, *demonstrationes* et *scholia* (Erklärungen, Sätze, Beweise und Anmerkungen). In Mathesi applicata his adhuc *experientiae*, *observationes* et *experimenta* accedunt.

§. 21. *Definitio* dicitur praecisa ac clara notionis (conceptus) completae alicujus rei (objecti) determinatio. Nempe notionem (conceptum) vel ideam ita determinare debet, ut haec de re (definita) nec pauciores nec plures notas (vel characteres) indicet et hae per se sint clarae. Cum definitio simul monstrat, quomodo res possibilis sit; tum dicitur *genetica*, v. g. circulus est figura plana, quae describitur, cum recta circa punctum fixum movetur. Cum hoc definitio non exponit, vocatur *theoretica*, v. g. circulus est figura plana, in qua quodvis punctum perimetri (peripheriae) a certo puncto aequidistat.

§. 22. *Propositio* (Satz) appellatur determinatio rationis inter duas cognitiones. Illa, de qua altera affirmatur, vel negatur, dicitur *Subjectum*, et altera *Praedicatum*. Quodvis horum est vel mera notio (conceptus), vel etiam jam ipsamet propositio esse potest, uti v. g. in *propositionibus hy-*

potheticis. In his dicitur propositio illa, quae Subjectum repraesentat, *conditio*, *positio*, *subpositio*, vel *hypothesis* (die Bedingung, Annahme, Voraussetzung, oder die Hypothesis), ea autem, quae praedicatum repraesentat, *conclusio* (consequentia) vel *Thesis*, (Folge).

§. 23. Propositio audit *theoretica*, cum solum determinat, quod res ita et ita sit, vel non sit, *practica*, cum determinat, quod et quomodo (qua ratione) res sit possibilis. Propositio, cujus certitudo jam per se evidens est, quin primum confirmari debeat, dicitur *immediate clara*. Cum haec simul talis est, ut etiam a nemine p. t. magis confirmari queat; tum dicitur si est theoretica, *Axioma* (Grundsatz), v. g. ab uno puncto ad alterum unica tantum linea duci potest, et si est practica, vocatur *Postulatum* (Forderungssatz), v. g. ducere rectam ab uno puncto ad alterum. Cum e contrario propositio non est immediate clara, tum dicitur *Theorema* (Lehrsatz), si theoretica est; v. g. tres anguli trianguli rectilinei aequales sunt duobus rectis; et cum est practica vocatur *Problema* (Aufgabe), v. g. lineam datam bifariam secare.

Determinatio rationis (modi), qua problema possibile fit, vocatur *Solutio* (resolutio, Auflösung). Propositio, quae ex aliis immediate vel facili consecutione deducitur (necessaria consecutione), appellatur *Corollarium* (consectarium, Zusatz). Theorema, vel problema, quod non ad eam disciplinam, in qua inducitur, verum ad alienam spectat, vocatur *Lemma* (Lehnsatz).

§. 24. *Probatio mathematica*, vel *demonstra-*

tio dicitur exhibitio (expositio) necessariae connexionis (nexus) inter praedicatum et subjectum propositionis. Cum veritatem certam propositionis immediate (directe) monstrat, dicitur *directa*, si contra hanc ex impossibilitate (absurditate) contrarii monstrat (deducit), vocatur *indirecta* seu *apogogica* demonstratio. Utraque in Mathesi aequalis est dignitatis (valoris).

§. 25. *Scholion* (Anmerkung) est quaedam praevia adnotatio post definitionem vel propositionem quampiam poni solita, ad eas declarandas (explicandas), ad admonendum de proprio momento argumentationis, ad praecavendum variis contradictionibus (objectionibus) et alienis interpretationibus vel falsis intelligentiis, ad inducendam utilitatem vel historiam propositionis etc. Scholia itaque prorsus independentia et longe aliquid aliud sunt, quod Systema doctrinarum mathematicarum ipsum nec minime afficit, ac igitur error est contra methodum, si in quapiam demonstratione ad Scholium revocatur.

§. 26. Differentia specifica inter methodum *mathematicam* et *philosophicam* in eo consistit. Philosophus suis cum conceptibus nihil aliud facere potest, quam ex illis ratiocinari (conclusiones facere). Mathematicus vero, antequam per conclusiones (consectationes) ex conceptibus suis progredi queat, hos primum construere, hoc est eorum objecta *a priori in concreto* exhibere (darstellen), vel *intuitiva* reddere (anschaulich machen) debet. Hoc pacto confestim realitatem objectivam cujusvis conceptus id est, possibilitatem ejus objecti claram reddit, cum hoc imaginationi immediate proponit et

oſtendit, vel quaſi depingit. Hoc quoque modo in quavis propoſitione connexionem neceſſariam praedicati cum ſubjecto in concreto exhibet, et cum hoc in quovis ratiocinio (ſyllogismo) tam in praemiſſis, quam in conclufione praeſtat; omnes ejus probationes ſimul monſtrationes (Vorzeigungen, exhibitiones) propoſitionis probatae, igitur verae ſunt *Demonſtrationes*. In hoc ipſo magna illa praerogativa *evidentiae* vel *claritatis* nititur, ob quam Mathematica prae omnibus reliquis ſcientiis tantopere praefertur et qua excellit, ac cum tantum quanta (merae quantitates) a priori conſtrui queant; ex his ſimul clarum eſt, quare objectum Matheſeos *ſola quanta* (merae quantitates) ſint. Natura iſthaec methodi mathematicae jam Mathematicos facultate ornat, ut ſequentem ordinem ſtricte ſcientificum ſequi valeant, in quo illos nulla alia ſcientia imitari poteſt.

1. In quavis re, de qua locuturi ſint, a *definitione* ordiuntur. Hoc valent, cum realitatem definitionum ſuarum probare valeant. Hac igitur de cauſſa penes illos eſt, quomodo rem definire velint, dummodo definitio legibus adoptata ſit logicis. Hac ratione quaevis vox (quivis terminus), qua utuntur, ſuam claram et determinatam habet ſignificationem, quam nunquam variant.

2. Inducunt porro *Axiomata* et *Poſtulata*, cumprimum ea, quae in illis continentur, definita (explicata) fuerint.

3. Ope horum ſemper oſtendunt, quod, ac quo modo res poſſibilis ſit.

4. Propoſitiones hoc ordine locant, ut nec in

resolutione problematis cujuspiam, nec illa ulla demonstratione propositio aliqua inveniatur, quam ex praemissis (praecedentibus probatis) nondum possent citare.

5. Hic perfectio systematica requirit, ut et omnia secundum regulas Logices debite distribuantur, ideoque materiae hoc ordine locentur, ne singulae sine necessitate separentur (dilatentur), et diversae inter se commiscceantur.

6. Ad abbreviandum sermonem (verba, terminos) utuntur magni momenti compendio hoc, ut verborum loco, quantitates ipsas zyfris (notis numericis), vel adhuc accommodatius singulis litteris, earumque modos conjunctionis (relationis) aliis aptis signis exprimant.

In Mathesi applicata in locum postulatorum et axiomatum numeri secundi veniunt *experientiae*, *observationes* et *experimenta*.

Elementa
Matheseos Generalis.

I.

Generalis Additio et Subtractio Quantorum.

Definitio 1.

§. 1. Notae characteristicae *internae* alicujus rei illae dicuntur, quae ejus qualitatem et quantitatem concernunt, *externae* eae, quae ejus locum in spatio et in tempore designant.

Definitio 2.

§. 2. Res, quae nullo charactere interno a se distingui queunt, nuncupantur *in se consideratae perfecte eaedem* (eadem).

Corollarium. Ergo res, quae in se consideratae perfecte eaedem sunt, solum respectu loci sui in spatio et in tempore diversae esse possunt (§. 1.).

Definitio 3.

§. 3. Quando plura, quae in se considerata perfecte eadem sunt, eodem tempore in eodem loco spatii concipiuntur id est repraesentantur; tum praedicatur: *sunt unum idemque*, vel *non plura quam unum*, *eadem numero*, *unicum*.

Definitio 4.

§. 4. Homogenea ejusdem qualitatis dicuntur *ſimilia* (ähnlich), ejusdem quantitatis *aequalia* (gleich). Ea, quae ſimilia et aequalia ſimul ſunt, *congruunt*, dicunturque inter ſe congruentia. Homogenea, quae non ſunt ſimilia, vocantur *diſſimilia* (unähnlich), quae non ſunt aequalia, *inaequalia*. Ea, quae adeo heterogenea ſunt, ut nec ſimilia nec aequalia eſſe poſſint, appellantur *diſparata* (unvergleichbar), v. g. ſuperficies et linea. Signum ſimilitudinis eſt ∽; aequalitatis =; mutuo congruentium ≅, vel ≌.

Coroll. 1. Similia reſpectu qualitatis ſuae, aequalia reſpectu quantitatis ſuae ſibi mutuo ſubſtitui poſſunt, et vice verſa. Ea, quae reſpectu qualitatis ſuae ſibi invicem ſubſtitui poſſunt, ſunt ſimilia, et quae reſpectu quantitatis ſuae ſubſtitui queunt, ſunt aequalia (Proleg. §. 2.).

Coroll. 2. Similia itaque *interne* tantum per ſuam quantitatem a ſe invicem diſcernuntur, aequalia ſolum per ſuam qualitatem (§. 1.), congruentia inter ſe ſunt in ſe ſpectata perfecte eadem (§. 2.), et ideo tantum per ſuum locum in ſpatio et in tempore diverſa eſſe poſſunt (§. 2. Coroll.).

Coroll. 3. Congruentia igitur ejusmodi ſunt, quae ſibi mutuo perfecte ſubſtitui poſſunt (Proleg. §. 2.), et ſi ſimul in eodem loco concipiantur, tum deſinunt plura eſſe, et tantum unicum ſunt (§. 3.).

Coroll. 4. Quaevis quantitas aequalis eſt ſibimet ipſi, id eſt $a = a$.

Coroll. 5. Quae aequalia ſunt eidem tertio (vel aequalibus aequalia) ea ſunt aequalia inter ſe, id eſt, ſi

$$\begin{array}{l} a = x, \text{ et} \\ b = x, \text{ erit} \\ \hline a = b. \end{array}$$

Nam in propoſitione $a = x$, loco x poteſt poni b (Coroll. 1.).

Definitio 5.

§. 5. Ea quantitas, quae cum una vel pluribus homogeneis ſimulſumpta, ut *una* quantitas (*quantum*) conſiderari poteſt, dicitur *pars* hujus, et haec reſpectu illius *totum* (ein Ganzes), et eae quantitates homogeneae, quae cum parte ſimulſumptae totum producunt, dicuntur *compartes* prionis, vel *complementum partis ad totum*. Partes eae, quae ſimulſumptae totum efficiunt, appellantur *partes actuales* (wirkliche Theile), ejusmodi partes autem, quae ſimulſumptae totum non efficiunt, *merae potentiales* audiunt. V. g. 7 partes cum 5 et 3 partibus ſimulſumptae efficiunt 15 partes; ergo 7 eſt pars de 15; 15 eſt totum; 5 et 3 ſunt compartes; 7, 5, 3 ſunt actuales, 7 et 5 vero vel 7, 4, 2 ſolum potentiales partes de 15 ſunt.

Coroll. 1. Igitur totum ſuis actualibus partibus aequale eſt (§. 4.), vel totum aequale eſt ſuis omnibus partibus ſimulſumptis.

Coroll. 2. Si a pars de g ſit; datur ſemper compars aliqua d (per def.), quae cum *a* ſimulſumpta quantitati g aequalis eſt (Coroll. 1.). Id eſt: quando $a < g$, et $d < g$; poteſt $a + d = g$ eſſe.

Definitio 6.

§. 6. Quantitatem quampiam *ſemel ſumere* ſignificat, illam abſolute ponere. Quantitatem *aliquoties ſumere*, vel *repetere*, nihil aliud eſt, quam

illam successive ad se ipsam addere, et secum ipsa simul sumere. Quantitatem *infinitis vicibus sumere*, est, in ejus repetitione nunquam cessare (finire). Pars talis quantitatis cujus repetitione haec efficitur, dicitur ejus *pars aliquota*, et haec ipsa *multiplum* illius (vielfaches). Talis pars autem quanti, per cujus repetitionem hoc produci nequit, dicitur pars hujus *aliquanta*. v. g. 4 est pars aliquota de 12, et 12 multiplum de 4; de 9 autem est 4 pars aliquanta.

Definitio 7.

§. 7. Id, quod partes habet, dicitur *divisibile*, (theilbar, *compositum*, zusammengesetzt); quod nullas habet partes, *indivisibile*, *simplex*. Id cujus pars quaevis iterum est divisibilis, dicitur *divisibile in infinitum*, (ins Unendliche theilbar).

Coroll. Ergo id, quod in infinitum divisibile est, compositum est, in quo pars quaevis ipsamet composita est, nullas ergo partes simplices habet.

Definitio 8.

§. 8. Si quantitas quaepiam non alteri ipsi, sed tantum parti alterius aequalis est; tum dicitur hac *minor*, et haec dicitur illa *major*. Signum majoritatis est $>$; minoritatis $<$. v. g. $7>4$; et $4<7$, lege: 7 majus 4, et 4 minus est 7.

Coroll. 1. Ergo pars nunquam est toto major. Nam si pars *a* major esset toto *b*; foret $b<a$ (per defin.), igitur tantum parti de *a* aequale (per defin.), ergo respectu *a* non totum (§. 5.), quod contra subpositionem est.

Coroll. 2. Inter duas quantitates inaequales prior vel est major vel minor secunda. Si *a* non est aequale *b*; erit vel $a>b$, vel $a<b$.

Nam cum n[illegible]eri aequalis est (§. 4.); hinc [illegible]ioris (§. 5.), vel prior part[illegible]t, ergo prior vel major, vel [illegible] quam secunda (per defin.).

Coroll. 3. Si quantitas minor, vel major una duarum aequalium quantitatum sit; minor quoque vel major altera est, id est, si $b = c$, et $a < b$ fuerit; etiam $a < c$ erit. Et si $a > b$ est; etiam $a > c$ erit. Nam tum in propositione $a < b$; cum in propositione $a > b$ loco b potest c poni (§. 4. Corol. 1.).

Coroll. 4. Si quantitas minor sit minore ex duabus quantitatibus inaequalibus; etiam minor est, majore, id est, si

$a < b$, et

$b < c$; erit etiam

$a < c$. Nam cum *a* tantum parti de *b*, et *b* tantum parti de *c* aequale (per defin.); ergo eo magis *a* tantum parti de *c* aequale erit; ergo $a < c$ (per defin.).

Coroll. 5. Si quantitas major sit, quam major duarum inaequalium magnitudinum; etiam major est, minore, id est; si fuerit

$a > b$ et

$b > c$; erit

$a > c$. Nam cum hic $c < b$, et $b < a$; erit $c < a$ (Coroll. 4.), igitur $a > c$.

Definitio 9.

§. 9. Cessatio (finitio) alicujus rei, vocatur ejus *limes* (extremitas, finis). Magnitudo dicitur *limitata* (terminata), quatenus alicubi desinit (cessat). Magnitudo dicitur *finita*, (endlich), quando

prorſus eſt limitata, [illegible] *infinite magna*, ſi major, *infini*[illegible] cogitetur, quavis alia homogenea [illegible]

Scholion. In Math[illegible] hic nobis ſolum de quantitatibus finitis [illegible] venit.

Poſtulatum 1.

§. 10. Plures datas homogeneas magnitudines in *unam*, id eſt in *totum* permutare.

Poſtulatum 2.

§. 11. Quamvis magnitudinem datam in mente continuo augere, vel minuere, id eſt, illam ſemper adhuc majorem, vel minorem cogitare.

Propoſitio immediate clara (evidens.)

§. 12. Pars minor eſt toto, et totum majus qualibet ſua parte.

Definitio 10.

§. 13. Plures datas magnitudines *addere*, nihil aliud eſt, quam invenire magnitudinem (aliquam), quae junctim ſumptis datis aequalis ſit. Magnitudines datae dicuntur *Summandae*, inventa (quaeſita) *Summa* vel aggregatum. Signum additionis eſt illud (+), dictum *plus* vel *et*. Dum Summandus pluribus quantitatibus conſtat, parentheſi includitur. v. g. (a+b) + c=d.

Coroll. Ergo Summa eſt totum, et ſummandi ſimul ſumpti ſunt ejus partes actuales (§. 5.), igitur ſumma ſemper major eſt, quovis ſummando (§. 12.)

Coroll. 2. Si itaque a>b ſit; ſemper datur quantitas aliqua *d*, quae ad *b* addita ipſum *a* producit, id eſt, ſi a>b ſit; ſemper a= b+d (§. 5. Cor. 2.); v. g. 8>5, ergo 8= 5+d= 5+3.

Axioma 1.

§. 14. Magnitudo Summae (quantum) eadem eſt, ſive Summandus ſecundus ad primum, ſive primus ad ſecundum addatur v. g. $a+b=c$ vel $b+a=c$.

Axioma 2.

§. 15. Magnitudo (quantum) Summae eadem manet, ſive ad quantitatem datam altera una ſumpta integra, ſive ſingulae ejus partes ſucceſſive addantur. v. g. $5+3=5+1+1+1=8$; et $5+3a=5+a+a+a$.

Propoſitiones immediate clarae (evidentes) Additionis.

§. 16. 1) Si aequalibus aequalia addantur; Summae ſunt aequales. Si $a=x$ et

$$\frac{3=3;\ \text{erit}}{a+3=x+3.}$$

2) Si majori atque minori aequale addatur; prior Summa major eſt ſecunda.

3) Si majori plus addatur, quam minori; prior Summa major eſt, quam ſecunda; ut ſi

$$\frac{\begin{array}{l} a>b\ \text{et} \\ 4<3;\ \text{erit} \end{array}}{a+4>b+3.}$$

Definitio 11.

§. 17. Datam magnitudinem ab alia (altera) *Subtrahere* eſt: magnitudinem invenire, quae priori addita ſecundam det. Signum Subtractionis eſt (—), dictum: *minus*. Magnitudo, a qua altera ſubtrahitur vel ſubtrahenda eſt, dicitur *Minuendus*, magnitudo, quae ſubducitur dicitur *Subtrahendus* (numerus), et magnitudo quaeſita, *differentia*

vel *residuum*. Subtrahere itaque est invenire differentiam magnitudinum. Si $a - b$ jam ut differentia spectatur; parenthesi clauditur. v. g. $a - b = (a - b)$.

Coroll. 1. Si igitur differentia addatur subtrahendo; prodit minuendus, v. g. si sint $8 - 3 = 5$; erit $8 = 5 + 3$ (per defin.).

Coroll. 2. Si a Summa duarum magnitudinum una auferatur; altera restat, v. g. si $8 = 5 + 3$; erit $8 - 3 = 5$. Nam 3 ab 8 subtrahere est, invenire numerum, qui ad 3 additus, 8 det (per defin.). At numerus hic est 5, quia $8 = 5 + 3$ (p. hypoth.); ergo $8 - 3 = 5$.

$$\begin{array}{l} \text{Id est} \quad 8 = 5 + 3 \\ \quad\;\; - 3 = \;\; - 3; \text{ ergo} \\ \hline \quad\;\; 8 - 3 = 5. \end{array}$$

Coroll, 3. Si a minuendo differentia auferatur; remanet subtrahendus, v. g. si $(8-3) = 5$ sit; erit $8 - 5 = 3$. Cum enim hic $8 = 5 + 3$ est (Cor. 1); ergo erit $8 - 5 = 3$ (Cor. 2.).

Coroll. 4. Si magnitudini altera addatur, et simul ab ea auferatur; illa invariata manet, v. g. $(8+3) - 3 = 8$. (Cor. 2.).

Coroll. 5. Si a magnitudine altera subtrahitur, et haec iterum ad differentiam additur; illa immutata manet, v. g. $(8-3) + 3 = 8$ (Cor. 1.).

Coroll. 6. Idem est, utrum magnitudini primum secunda addatur, et deinde tertia ab illa subtrahatur, vel utrum primum tertia subtrahatur, et deinde secunda addatur; v. g. $(8+4) - 3 = (8-3) + 4$. Nam cum $(8-3) + 4 + 3 = (8-3) + 3 + 4$ (Coroll. 14.) $= 8 + 4$ (Corol. 5.); erit $(8+4) - 3 = (8-3) + 4$ (Cor. 2.).

Coroll. 7. Idem est, utrum magnitudini cuipiam differentia duarum aliarum una sumpta addatur, vel utrum illi minuendus addatur, et subtrahendus auferatur. v. g. $8 + (5-3) = (8+5) - 3$. Cum enim $8 + (5-3) + 3 = 8 + 5$ fit (Cor. 5); ergo etiam $8 + (5-3) = (8+5) - 3$, (Corol. 2).

Coroll. 8. Idem est, utrum a magnitudine quadam Summa duarum aliarum (una sumpta), vel unus summandus post alterum subtrahatur v. g. $8 - (4+2) = 8 - 4 - 2$. Nam quia $8 - 4 - 2 + (4+2) = 8 - 4 - 2 + 4 + 2$ (§. 15.) $= 8 - 4 + 4 - 2 + 2$ (Cor. 6) $= 8$ (Cor, 5); hinc $8 - (4+2) = 8 - 4 - 2$ (Cor. 2).

Coroll, 9, Idem est, utrum a magnitudine quapiam differentia duarum aliarum una sumpta subtrahatur, vel utrum ab illa minuendus auferatur, et subtrahendus addatur, v. g. $8 - (5-2) = 8 - 5 + 2$. Nam cum $8 - 5 + 2 + (5-2) = 8 - 5 + 2 + 5 - 2$ (Cor, 7) $= 8$ (Cor. 5. 4); erit $8 - (5-2) = 8 - 5 - 2$ (Cor. 2).

Propositiones immediate clarae Subtractionis.

§. 18. 1) Si ab aequalibus aequalia subtrahantur; differentiae sunt aequales. $a = x$

$$\begin{array}{r} a = x \\ 2 = 2 \\ \hline a - 2 = x - 2. \end{array}$$

2) Si ab eadem magnitudine altera minor et major subtrahatur; in primo casu plus restat, quam in secundo. v. g. $a = a$

$$\begin{array}{r} a = a \\ 5 > 7;\ \text{erit} \\ \hline a - 5 > a - 7. \end{array}$$

3) Si a majori et minori quantitas aequalis

(eadem) auferatur; in primo casu plus restat, quam in secundo. v. g.

$$\begin{array}{c} 8 > 7 \\ 5 = 5 \\ \hline 8 - 5 > 7 - 5. \end{array} \quad \Bigg\| \quad \text{vel} \quad \begin{array}{c} a > b \\ c = c \\ \hline a - c > b - c. \end{array}$$

4) Si a majore magnitudine minus auferatur, quam a minore; in primo casu plus restat, quam in altero. v. g.

$$\begin{array}{c} 8 > 7 \\ 5 < 4 \\ \hline 8 - 5 > 7 - 4 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \text{vel} \quad \begin{array}{c} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d. \end{array}$$

Definitio 12.

§. 19. Magnitudinem quampiam per aliam homogeneam, quae ejus *mensura* (Maass) vel *unitas* appellatur, *metiri*, est, determinare, quoties mensura ipsamet, vel assumpta aliquota pars ejusdem summi debeat, ut quantitas (illa magnitudo) producatur (efficiatur). Determinatio hujusce *quoties* (wie vielmal), dicitur *numerus*.

Coroll. 1. Mensura cum magnitudine mensuranda debet esse homogenea (per defin.).

Coroll. 2. Magnitudinem per aliam *metiri* igitur tantundem est, quam illius quantitatem per homogeneam magnitudinem determinare (Prol. §. 4.).

Coroll. 3. Cum jam Mathesis Quanta ut talia, pro objectis habeat, id est, quatenus haec quantitate gaudent; mensio magnitudinum principale objectum Matheseos est.

Coroll. 4. Mensio magnitudinum tantum per numeros est possibilis (per defin.).

Coroll. 5. Omnis numerus ipsemet, magnitudo (Proleg. §. 5.) est.

Definitio 13.

§. 20. Magnitudo (quantum), cujus quantitas per numerum quempiam determinatur, dicitur *quantitas numerata* (eine gezählte Gröſse), v. g. tres rhenenſes. Scientia numerorum et quantitatum numeratarum appellatur *Arithmetica*.

Coroll. Omnis ergò magnitudinum menſio in Arithmetica nititur (§. 19. Coroll. 4).

II.

Arithmetica.

Pars Prima.

Arithmetica Elementaris.

Caput I.

De numeris integris.

Definitio 14.

§. 21. Determinatio, quoties ad producendam magnitudinem quampiam mensura vel unitas ipsamet sumenda sit, dicitur *numerus integer* (ganze Zahl). Nimirum: si magnitudo mensurae aequalis sit; tunc continet mensuram *semel*, ac generaliter quicunque numerus integer *n*, tantumdem est, ac *n* unitates, vel *n*ties unum, id est: $n = n \times 1 = 1 \times n$.

Coroll. 1. Igitur quilibet numerus integer est

Summa ex proxime praecedentibus et ex unitate. V. g. $3 = 2 + 1$; $20 = 19 + 1$.

Coroll. 2. Omnis numerus integer n tantus est, ut semel n. Nam cum n = n (§. 4. Coroll. 4); erit n tantum, ut semel n (p. defin.).

Coroll. 3. Cum jam etiam n tantum sit, ac *n*ties 1 (p. defin.); erit semel n = nties 1 (§. 4. Cor. 5.). V. g. semel 5 = quinquies unum.

Definitio 15.

§. 22. *Decadicum* Systema est modus ac ratio, omnes numeros integros per decuplum decenarii exprimendi.

Nempe: Ad exprimendam quantitatem numerorum omnem sequenti artificio utimur. Unitates tantum usque ad decem numerantur; 10 unitates valent pro mensura altiori et dicuntur 1 *decas* (decenarius) vel 1 unitas primi ordinis. 10 decades valent pro mensura altiore vel pro 1 unitate secundi ordinis et dicuntur *centum* (centenarius). 10 centenarii valent pro mensura altiore vel pro 1 unitate tertii ordinis et dicuntur *mille* (millenarius).

Exinde jam oriuntur mensurae altiores *decem millia* (decies mille), *centum millia* (centies mille), et *millena millia* (millies mille) vel 1 *millio*. Mille millia millionum vocantur *billio*, mille millia billionum vocantur *trillio*, mille millia trillionum vocantur *quadrillio* et ita porro. Hac ratione (decupla) sequuntur mensurae diversae, vel unitates, de quibus quaevis subsequens decies major est, quam proxime praecedens, sequenti ordine invicem:

Unitates, Decades, Centum (Centenae),
Mille, Decies mille, Centies mille,
Milliones, Decem milliones, Centum milliones,

Mille milliones, Decem millia millionum, Centum millia millionum,
Billio, Decem billiones, Centum billiones,
Mille billiones, Decem millia billionum, Centum millia billionum,
Trillio, Decem trilliones etc.

Definitio 16.

§. 23. Notae (figurae) numerorum dicuntur *zyfrae;* ut: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ſunt notae numericae (Zahlziffern) ſignificantes; 1 Unitas, 2 Binarius, 3 Ternarius, 4 Quaternarius, 5 Quinarius, 6 Senarius, 7 Septenarius, 8 Octonarius, 9 Novenarius, 0 Zerus. Zerus = 0, nihil per ſe valet, ſed loca figuris vacua occupat. Per quemlibet locum natura inferioris vel altioris ordinis determinatur. Primum locum a dextris ſiniſtram verſus unitates, ſecundum decades, tertium centenarii, quartum millenarii et ſic porro occupant. Hoc modo non ſolum quivis enunciatus (§. 22.), ſed etiam quivis ſcriptus numerus Summa eſt ex Unitatibus, Decadibus, Centenariis etc.

Si itaque quilibet datus numerus in claſſes diſtinguatur, in quamvis claſſem tres zyfras ſumendo, ac poſt primam claſſem punctum, poſt ſecundam comma, poſt tertiam punctum, poſt quartam duo commata, poſt quintam punctum, poſt ſextam tria commata adnotentur, et ita porro; punctum quodvis ſignificat *mille;* unum comma ſignificat *millionem*, duo commata *billionem* vel bimillionem, tria commata *trillionem* vel trimillionem, quatuor *quadrillionem* vel quadrimillionem, quinque quintillionem et ſic porro, et facile igitur poterit quivis numerus datus et enunciari et ſcribi.

Scholion 1. Millio dicitur bene latine: *millena millia* = 1000 × 1000 = 1,000.000; vel decies centena millia = 10 × 100 × 1000.

Mille milliones dicuntur latine: *millies millena millia* = 1000 × 1000000 = 1.000,000.000.

Billio dicitur latine: millies millies millena millia = 100 × 100 × 1000000 = 1,,000.000,000.000

Trillio dicitur: *millies millies millies millies millena millia* = 1000 × 1000 × 1000 × 1000 × 1000000 = 1,,,000.000,,000.000,000.000. Ita numerus 2658934 divisione in classes facta = 2,658.934 enunciatur; duo milliones, sexcenta quinquaginta octo millia, nongenta triginta quatuor, *vel sic:* bis millena millia, sexcenta quinquaginta octo millia, nongenta triginta quatuor.

Et numerus sequens divisus

18,,,446.744,,073.709,551.615 legendus *ita*: octodecim trilliones, quadringenta quadraginta sex millia billionum, septingenti quadraginta quatuor billiones, septuaginta tria millia millionum, septingenti novem milliones, quingenta quinquaginta unum millia, sexcenta quindecim. *Vel hoc modo:* Decies octies millies, millies, millies, millies, millena millia = (18,,,000.000,,000.000,000.000); quadringenties quadragies sexies millies millies millies millena millia = (446 billionum);

Septingenties quadragies quater millies millies millena millia = (744,,000.000,000.000);

Septuagies ter millies millena millia = (73 millia millionum);

Septingenties novies millena millia = (709,000.000);

Quingenta quinquaginta unum millia = 551000;

Sexcenta quindecim = (615).

Schol. 2. Numeratio est ars scribendi et enunciandi numeros secundum valores suos totales. Ars omnis enunciandorum numerorum in hoc sita est, ut numeri secundum figuram, locum et signa enuncientur. Quaelibet zyfra duplicem significatum habet, alterum suum proprium (valorem naturalem), alterum localem. Quo ulterius zyfra sinistram versus locata est, eo majorem habet valorem. Loca vacua zero replentur. Quaevis classis tria habet loca, in quorum primo unitates, in quorum altero decades, in quorum tertio centenarii occurrunt. Dantur igitur:

unitates, decades et centenarii *simplices*;
unitates, decades, centenarii *millenariorum vel millium*;
unitates, decades, centenarii *millionum*;
unitates, decades, centenarii *millenariorum* (vel millium) *millionum*;
unitates, decades, centenarii *billionum*; et sic porro.

Millia, quatuor occupant loca, v. g. 6 millia scribes = 6000.

Milliones septem occupant loca, v. g. 6 milliones = 6,000.000 = 6000000.

Billiones 13 occupant loca, v. g. 6 billiones = 6,,000.000,000.000 = 6000000000000.

Schol. 3. In scribendis numeris ita procedendum: primum signa vel classes, tum figurae suo loco, denique zeri vacuis figura locis adscribantur, v. g. Si sit scribendus hic numerus: Sexcenti septem milliones, quadringenta quatuor millia, et unum. Primum fiant tres classes (cum signis) = 3tia | 2da | 1ma |; tum videatur, an quaevis figura

suum occupet locum: $\begin{array}{c|c|c|} 3^{tia} & 2^{da} & 1^{ma} \\ 6.7 & 4.4 & ..7 \end{array}$; denique loca vacua zero repleantur: 607, 404. 001; si nulla cyfra amplius sequatur. V. g. Sexcenti septem milliones ita scribuntur = 607,000.000. Vel, quingenta quadraginta quatuor millia et unum = 544,000.001. Quis Centenarios, decades et unitates adscribere noverit, is facile omnes numeros integros scribet; modo ad distributionem in praedictas classes, et significatum signorum attenderit. In qualibet classe tres notae adesse debent, classis finistima potest etiam duabus, aut una nota duntaxat constare. Conferatur cum his doctrina de fractionibus decimalibus.

Problema. 1.

§. 24. Numero dato integro, alium addere, qui una tantum cyfra constet. V. g. Sint 24 et 3 addenda.

Resolutio. Numero dato subscribatur alter addendus rite (inter unitates prioris ponendus), fiat collectio unitatum, et si aliqua decas adfuerit, addatur haec simul decadi numeri dati.

Hinc $\begin{array}{r} 24 \\ 3 \\ \hline 27 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ \hline 33 \end{array} \Bigg| \begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ \hline 13 \\ 20 \\ \hline 33 \end{array}$

Demonstratio. $24+3=24+1+1+1=27$, et $24+9=20+4+9=20+13=33$. Additio nempe est collectio numerorum datorum in totum, sed hac ratione, quando infertur 24 plus tribus dant 27, successive 4 et 3 dant 7, et viginti

dant 27, collectio habetur; ergo hoc modo additio rite facta erit.

Problema 2.

§. 25. Plures datos numeros integros generatim addere.

Reſolutio. Homogenea homogeneis adſcribantur, id eſt: unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis etc. ſubſcribantur, et infra ductam lineam colligantur in ſummam, primum unitates, tum decades, denique Centenarii, millenarii et ſic porro, ſemper homogenea junctim.

V. g. 8722	8722	8722
340	340	340
49	49	49
3	3	3
14	14	9114
10:	100	
10::	1000	
8:::	8000	
9114	9114	

Si Summa unitatum excedat numerum 9; ac proinde ſi excreſcat in numerum pluribus notis numericis exprimendum; ſola dextima nota ſcribatur infra lineam, altera vero interim mente retineatur, ac poſtea addatur decadibus in claſſe ſequenti. Eodem modo adde decades, deinde centenarios etc.

Demonſtratio.

$$\begin{aligned} 8722 &= 8000 + 700 + 20 + 2 \\ 340 &= 300 + 40 + 0 \\ 49 &= 40 + 9 \\ 3 &= 3 \\ \hline 9114 &= 8000 + 1000 + 100 + 14, \end{aligned}$$

ſeu $9114 = 9000 + 100 + 14$.

Additio eſt datorum numerorum homogeneorum in unam ſummam collectio; atqui per has regulas colliguntur in unam ſummam omnes dati numeri homogenei unitatum, decadum etc., ergo additio rite peragitur per has regulas. Ut id magis perſpiciatur, fiat ſequens operatio:

8722 = 8 mill. + 7 cent. + 2 denar. + 2 unitates
340 = 3 cent. + 4 denar. + zer.
49 = + 4 denar. + 9 unitat.
3 = + 3 unitates;

9114 = 8 mill. + 10 cent. + 10 den. + 14. unitat.
= 9 millenar + 1 centenar + 1 denar + 4 unitat.

Ordo altior ſemper ad aequalem additur, quia tantundem eſt. Ita eſſet

	vel	ſuo
8722	8722	8722
340	340	340
49	49	49
3	3	3
4	4	9114.
1	1	
1	1	
9	9	
9114	9114	

Coroll. Quodſi igitur numero integro alter addatur; ſumma etiam eſt numerus integer.

Scholion. Examina rite peractae additionis dantur varia. 1) Si additio repetatur. 2) Si additio fiat initio deorſum, et ad examen ſurſum. 3) Si praecipue in longioribus ſeriebus addenda in plures partes dividantur, tum quaevis pars ſpeciatim colligatur, et poſtea omnes in unam ſummam aggregentur. V. g.

20		3788	
29		9999	
39		7887	
53	88	6788	21664
49		5653	
25		9887	
26	127	345	22328
39		49	
41		9	
321	106	44295	303
	321.		44295.

Problema 3.

§. 26. A numero integro dato, qui numerum 18 non excedat, alium minorem unius zyfrae subtrahere, dummodo differentia etiam unica zyfra sit.

Resolutio. Quaeratur, quot unitates numero subtrahendo desint, donec minuendo aequalis fiat; hae unitates differentia sunt. V. g,

$9 - 4 = 5$, vel
$$\begin{array}{r} 9 \\ 4 \\ \hline 5. \end{array}$$

Demonstratio. $4+1+1+1+1+1=4+5=9$. Ergo $9-4=5$ (§. 17. defin.).

Problema 4.

§. 27. Integrum datum numerum a dato majori subtrahere.

Resolutio. Subscribatur minor majori, ducaturque linea. Casus

1) Ubi nulla zyfra inferior major est superiore.

Quaevis inferior subducatur a sua superiore. E. g.:

4893 min.
2341 subtrah.

2552 = differentiae.

Demonstr. 4893 = 4000 + 800 + 90 + 3
2341 = 2000 + 300 + 40 + 1

2552 = 2000 + 500 + 50 + 2 = differentiae quaesitae, quia summa subtrahendi et diffenrentiae hujus aequalis est 4893 minuendo (§. 17.).

2) Si autem una alterave zyfra inferior, major sit superiore, augeatur superior denario, ac proxime sequens minuatur unitate, notaturque istud puncto. Denique subtrahatur inferior a superiore denario aucta. E. g.:

8347	8347
2338	2438
6009.	5909.

Demonstr. 8347 = 8000 + 300 + 30 + 17 min.
2338 = 2000 + 300 + 30 + 8 subtr.

Ergo 6009 = 6000 + 0 + 0 + 9.

Et 8347 = 7000 + 1300 + 30 + 17
2438 = 2000 + 400 + 30 + 8

5909 = 5000 + 900 + 0 + 9. Id est: Si nempe in minuendo ad quampiam zyfram 10 addatur, et a proxime sequente auferatur, id tantundem est, ac si ad eundem idem numerus simul addatur et ab illo subtrahatur (§. 17. Cor. 4.). Ergo magnitudo minuendi invariata manet, et tan-

tum id commodum obtinetur, ut nunc numerus inferior a superiori 10 aucto subduci queat.

3) Quodsi denique post numerum superiorem, qui majorem inferiorem habet, unus vel plures zeri sequantur; quivis zerus permutetur in 9, et proxime sequens numerus minuatur unitate. Id est, si in minuendo occurrant zeri; valet primus zerus decem, reliqui novem, et tunc subtrahitur. E. g.

80020	et 2000
62429	1924
17591.	76.

Demonstr. 80020 = 8000 + 20 et
62429 = 6200 + 400 + 20 + 9;

vel ita scribendo:

$$\begin{array}{l} 80020 = 79000 + 900 + 110 + 10 \text{ et} \\ 62429 = 62000 + 400 + 20 + 9; \text{ ergo} \\ \hline 17591 = 17000 + 500 + 90 + 1. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Et } 2000 = 1990 + 10 = 1000 + 900 + 90 + 10 \text{ et} \\ 1924 = 1920 + 4 = 1000 + 900 + 20 + 4; \text{ergo} \\ \hline 76 = 70 + 6 = 0 + 0 + 70 + 6. \end{array}$$

Cum enim hic quivis zerus unitate minui debeat (Nro. 2); permutatur ergo, si denario augeatur, in 9.

Coroll. Si numerus integer ab altero integro auferatur; etiam differentia eorum est integer numerus. Nam cum minori tot unitates, decades etc., addi debeant, donec major oriatur (§. 26.); hinc differentia est numerus integer (§. 21. 22.).

Schol. Examen subtractionis rite factae fit: 1) repetita subtractione, 2) si addatur differentia sub-

trahendo, ut videatur, utrum ex illis summa aequetur minuendo.

Definitio 17.

§. 28. Quantitatem per numerum quempiam *multiplicare*, est, invenire magnitudinem, quae ex data quantitate eodem modo producatur, ut numerus datus ex numero 1 (unitate). Numerus inventus dicitur *factum* vel *productum*, et alteri ambo dicuntur *factores*. Ille, qui multiplicatur, habet nomen *multiplicandi*, qui multiplicat, *multiplicatoris*. Signum multiplicationis est $\times$ (crux decussata), vel punctum (.) inter multiplicatorem et multiplicandum positum.

Coroll. 1. Si aequalia per aequalia multiplicentur; facta sunt aequalia, id est, si

$a = b$ et

$m = n$; erit

$a \times m = b \times n$. Nam in propositione $a \times m$ potest substitui b loco a, et n loco m, igitur $b \times n$ loco $a \times m$ (§. 4. Coroll. 1.); ergo est $a \times m = b \times n$.

Coroll. 2. Cum productum ex multiplicando produci debeat; ambo homogenea sunt (Proleg. §. 3), ac proinde quaelibet magnitudo esse possunt (quamlibet magnitudinem repraesentare possunt), v. g. linea, homo, liber etc. Cum e contrario multiplicator ex unitate (numero 1.) effici (produci) debeat; multiplicator semper numerus sit oportet (tanquam numerus considerandus).

Scholion. Igitur tantum per numerum possunt quantitates multiplicari, adeoque expressiones quae in multiplicatione numerorum mixtorum obveniunt, dum v. g. effertur: multiplicare florenos, et cruciferos per florenos et cruciferos etc.

sunt impropriae. Sensus enim proprius (verus) earumdem, uti inferius videbimus, nullus alius est, quam, numeros, quibus hae quantitates exprimuntur, per se invicem multiplicandos esse, et tunc pro producto numerum petitum dare.

Theorema 1.

§. 29. Magnitudo per numerum *integrum* multiplicatur; si toties sumatur, vel ad se ipsam addatur, quot unitates multiplicator continet, v. g. 8×3 est $= 8$ ter sumpto $= 8 + 8 + 8 = 24$. Et $a \times 3 =$ a ter sumpto $= a + a + a = 3a$.

Demonstr. Nam productum $a \times 3$ ex multiplicando (a) eodem modo effici debet, ut numerus integer (3) ex unitate (1) (§. 28.); hic autem ex 1 producitur, si numerus (1) ter sumitur (§. 21.). Ergo productum $a \times 3$ producitur ex quantitate a, si haec ter sumitur, id est, si haec ter ad se ipsam additur §. 6. 10.).

Coroll. 1. Ergo etiam numerus integer per alium integrum multiplicatur, si ille toties ad se ipsum addatur, quot hic unitates continet, et hinc productum numerorum integrorum est quoque numerus integer (§. 25. Coroll.). V. g. $334 \times 4 =$ $= 334$ ter additis, id est

334
334
334
1002

Coroll. 2. Unitas (1) non multiplicat. Nam $a \times 1 = a$; vel $199 \times 1 = 199$; hoc est: a semel sumptum $= a$.

Coroll. 3. Summa duarum quantitatum multiplicatur per numerum integrum, si quaevis ea-

rum per hunc multiplicetur, et producta addantur. E. g.

$(a+b)\times 8 = a\times 8 + b + 8 = 8\,a + 8\,b.$

Sunt enim summandi partes Summae (§. 13. Cor. 1.). Si itaque quivis summandus 8ties summatur, et producta addantur; id tantundem est, ac si Summa ipsa octies sumpta fuisset (§. 5. Coroll. 1.). Vel totum aequale est partibus suis simul sumptis; ergo partes aliquoties sumptae aequales sunt Summae aeque aliquoties sumptae, id est: $(a + b) =$ Summae; ac $(a + b)\,8 = 8\,S$, et $8\,a + 8\,b = 8\,S$.

Coroll. 4. Differentia duarum quantitatum per numerum integrum multiplicatur; si quaevis earum per hunc multiplicatur, et productum minus a majori subtrahitur. E. g. $(a - b)\,8 = 8\,a - 8\,b$. Nam $(a - b)\,8 + b\times 8 = ([a - b] + b)\times 8$ (Cor. 3.) $= a\times 8$ (Cor. 5. §. 17.); ergo est $(a - b)\,8 = 8\,a - 8\,b$ (§. 17. Cor. 2.). Vel: $(a - b)\,8 = 8\,a - 8\,b$. Nam $a - b = d =$ differentiae. Et $a = d + b$ (§. 17. Cor. 1.). Et $8\,a = 8\,d + 8\,b$ (Cor. 3.); ergo $8\,a - 8\,b = 8\,d$.

Coroll. 5. Quantitas quaelibet multiplicatur per summam duorum numerorum integrorum, si per quemvis singulum multiplicatur, et producta singularia adduntur. E. g. $a\times(4 + 2) = 4\,a + 2\,a$ Si enim quantitas *a* primum quater, et tunc bis summatur, et utrumque addatur; toties haec sumpta erit, quantum unitates de 4 et 2 simul efficiunt, ergo toties, quot summa $4 + 2$ efficit (§. 13.).

Coroll. 6. Quantitas per differentiam duorum numerorum integrorum multiplicatur; si per quemvis singularem multiplicetur, et minus factum a

majori subducatur. E. g. $a \times (4 - 2) = 4a - 2a = 4a - a \times 2$. Nam $a \times (4 - 2) + a \times 2 = a(4 - 2 + 2)$ (§. 6.) $= a \times 4$ (§. 17. Cor. 5.), ergo $a(4 - 2) = 4a - a \times 2$ (§. 17. Cor. 2.). Vel ita: $a(b - c) = ab - ac$. Nam si $b - c = d$ sit; erit $b = d + c$ et

$$ab = ad + ac; \text{ ergo}$$
$$ab - ac = ad.$$

Coroll. 7. Quantitas multiplicatur per productum numerorum integrorum; si singulatim per quemvis factorem multiplicetur. E. g. Si $6 = 3 \times 2$ est; erit $a \times 6 = (a \times 3) \times 2$. Nam cum $6 = 3 \times 2 = 3 + 3$ (Theor. 1.). sit; erit $a \times 6 = a(3 + 3)$ (§. 28. Cor. 1.) $= a \times 3 + a \times 3$ (§. 5.) $= (a \times 3) \times 2$ (Theor. 1.). $= a \times 3 \times 2$. Vel: $a \times (12) = a \times 4 \times 3$. Nam $a \times (4) \times 3 = a(4 \times 3) = a \times 12$, et $a \times 12 = a(4 + 4 + 4) = 4a + 4a + 4a = a(4 \times 3)$.

Coroll. 8. Productum numerorum integrorum idem est, sive primus factor per secundum, sive secundus per primum multiplicetur, id est quando n, r integri sunt; est $n \times r = r \times n$, seu $nr = rn$. E. g. $8 \times 6 = 6 \times 8$. Nam posito, quod haec propositio de quocunque multiplicatore m valeat, nempe sit $n \times m = m \times n$; erit $n \times (m + 1) = n \times m \times n \times 1$ (§. 5.) $= m \times n + 1 \times n$ (§. 21. Cor. 3) $= (m + 1) \times n$ (Cor. 3.), ergo in hoc casu propositio etiam pro proxime sequenti multiplicatore $(m + 1)$ vera est. Enim vero propositio haec pro multiplicatore (1) vera est, quia $n \times 1 = 1 \times n$ (§. 21. Cor. 3.); ergo et pro multiplicatore 2, ergo et pro multiplicatore 3, et ita porro, hinc pro quovis multiplicatore (r) generatim vera est; id est generaliter est

$n \times r = r \times n$. Vel ita: aequales factores aequale dant productum; id est $n \times r = r \times n$,

Nam $n \times 1 = 1 \times n = 1.n.$

$n \times 2 = n(1+1) = n \times 1 + n \times 1 = 1.n + 1.n = 2.n.$

$n \times 3 = n(1+1+1) = 1.n + 1.n + 1.n = 3.n.$

et ita porro; ergo in genere $n \times r = r.n = rn$.

Coroll. 9. Numerus integer multiplicatur per 10, 100, 1000 etc., si illi ad dextram Zeri multiplicatoris adjungantur. E. g.

$4 \times 10 = 40$
$4 \times 100 = 400$
$4 \times 1000 = 4000.$
$40 \times 100 = 4000$ et

ita porro. Nam unus adjectus Zerus facit numerum decies majorem, duo Zeri centies, tres Zeri millesies majorem etc. (§. 23.).

Propositiones immediate clarae multiplicationis per numeros integros.

30. 1) Si quantitas quaepiam per integrum numerum majorem et minorem multiplicetur; primum productum majus est secundo. E. g.

$a = a$	$a > a$	si $b > c$ sit; erit etiam
$4 > 3$	$b > c$	$bx > cx$.
$4a > 3a$	$ab > ac$	

2) Si majus et minus per eundem integrum numerum multiplicetur; primum productum majus est secundo, id est: $a > b$

$n = n$

$an > bn.$

3) Si majus per majorem et minus per mi-

norem numerum integrum multiplicetur; productum primum majus eſt ſecundo. $a > b$

$c > d$

$ac > bd$

Definitio 18.

§. 31. *Tabula pythagorica* (das Einmal Eins) vel *abacus Pythagoricus* (Rechentiſch), illa dicitur, quae singulos digitos, vel novem notas numericas et earum facta continet. Construitur hac ratione: Duo latera rectanguli dividuntur in novem partes, et hae per lineas rectas lateribus parallelas conjunguntur, ut tota area rectanguli in areolas quadratas resolvatur. In serie horizontali ſumma ſcribuntur novem notae numericae; in secunda *binarius*, ejusque facta in omnes ſimplices, ad priorem ſcilicet numerum ſemper addendo duo; in tertia *ternarius* ejusque facta, ad priorem ſemper addendo tria, et ſic usque ad *novenarium*, et tabula omnia facta continebit numerorum ſimplicium, ut figura exhibet.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Usus Tabulae sequens est: unus factor in serie suprema, alter in serie sinistima summitur; communis areolarum concursus a suprema deorsum et a sinistra dextram versus progrediendo horum factorum productum continet. *Exemplum.* Quot dant septies novem? A 7 ex summitate deorsum progrediendo linea recta donec ad seriem deveniatur, in qua e sinistra 9 stat, habetur factum 63. Et sic de reliquis.

Coroll. Potest igitur abacus pythagoricus construi, si priorum 9 numerorum quivis successive ad se ipsum addatur, donec novies sumptus fuerit (§. 29. Coroll. 1.).

Problema 5.

§. 32. Numerum integrum datum per alium multiplicare.

Resolutio. 1) Si unus factorum ex unica tantum cyfra constat, infra unitates alterius ponatur, ducaturque linea, postea producta ex quavis cyfra subscribantur, adeo, ut quemadmodum in additione semper solae unitates scribantur, denarii autem producto proximo addantur. E. g.

3422 × 3 = 3422	3422	3422
3	3	3422
10266	6	3422
	6 :	10266
	12 : :	
	9 : : :	
	10266	

Demonstratio. Habetur ex definitione multiplicationis. Nam 3422×3, idem est, quod 3422 ter summere.

Ergo erit $3422 \times 3 = 3422 + 3422 + 3422 =$

$$\begin{array}{r} 3422 \\ 3422 \\ 3422 \\ \hline 10266. \end{array}$$

10266. Si itaque primus binarius ter, binarius secundus ter, quaternarius ter, et ternarius ter summatur, vel 2×3; 20×3; 400×3; postea 3000×3, summatur, obtinebitur:

$$\begin{array}{r} 3422 \\ 3 \\ \hline 6 \\ 60 \\ 1200 \\ 9000 \\ \hline \end{array}$$

Ergo Summa $= 10266. = 9000 + 1200 + 60 + 6.$

2) Si uterque factor plures cyfras continet; homogenea infra homogenea scribantur, inhoetur multiplicatio ab unitatibus, continueturque per omnes cyfras, producta ita sibi subscribantur, ut prima cyfra semper infra numerum eum stet, quicum multiplicatur, denique producta particularia in unam summam addantur; erit haec summa productum quaesitum. E. g. 4234 multiplicare per 232. Erit $4234 \times 232 =$

4234	4234
232	$232 = 200 + 30 + 2$
8468	$846800 = 4234 \times 200$
12702 :	$127020 = 4234 \times 30$
8468 : :	$8468 = 2414 \times 2$
982288.	$982288 = 4234 \times (200 + 30 + 2)$.

Demonstratio. Nam $4234 \times 232 = 4234 \times (200 + 30 + 2)$; hoc autem habetur, si singulatim multiplicetur (§. 29. Cor. 5.); estque

$$\begin{array}{llll} 4234 \times 2 & = 8468 & = & 8468 \\ 4234 \times 30 & = 127020 & = & 12702 : \\ 4234 \times 200 & = 846800 & = & 8468 :: \\ \hline & 982288 & = & 982288. \end{array}$$

Si ergo praescripto modo proceditur, nempe si 4234 primum per 2, tunc per 30 vel per 3 denarios, et denique per 200 vel per 2 centenarios multiplicetur, rite multiplicatur (§. 29. Cor. 9.); ergo multiplicatio rite facta est.

Definitio 19.

§. 33. Quantitas quaepiam dicitur ntesima pars alterius vel nties minor, quam haec, si n vicibus sumpta alteram producat, posito, quod n sit numerus *integer*. V. g. *a* dicitur 4ta, 5ta, 6ta, 7ma et sic porro pars de *b*, cum $4a = b$, vel $5a = b$, vel $6a = b$, vel $7a = b$ etc. est.

Coroll. Ergo *a* est ntesima pars de *b*, si $b = a \times n$, seu *a* nties ad se ipsum additum *b* det (§. 29.).

Definitio 20.

§. 34. Magnitudinem quampiam per numerum quemcunque *dividere*, nihil aliud est, quam invenire magnitudinem, quae per numerum hunc multiplicata magnitudinem datam efficiat. Signum divisionis sunt duo puncta supra se posita (:) vel linea horizontalis. Magnitudo data, audit *dividendus*; numerus per quem divisio fit, *divisor*, et magnitudo quaesita, audit *quotus* vel *quotiens*. V. g. 12 divisa per 3, scribes $(12 : 3) = 4$; vel $\frac{12}{3} = 4$ (quia $4 \times 3 = 12$). Est ergo *divisio distributio facti in factores suos.*

Coroll. 1. $a : n = q$ est, erit quoque

$$a = q \times n. \text{ Vel sic; } \frac{a}{n} = q; \text{ ergo } a = nq.$$

Id est; si quotus per divisorem multiplicatur; dividendus (per defin.) emergit.

Coroll. 2. Si productum per multiplicatorem dividatur, multiplicandus prodit, id est, si $a = q \times n$ sit; erit $a : n = q$, vel $\frac{a}{n} = q$. Nam si q ea sit quantitas, quae per n multiplicata a producat; dividere a per n est, invenire q (p. defin.).

Coroll. 3. Si magnitudo quaepiam per eundem numerum multiplicatur et simul dividitur, illa immutata manet, id est, $a \times n : n = a$ (Cor. 2.).

Vel $\frac{a \times n}{n} = \frac{an}{n} = a$.

Coroll. 4. Si magnitudo per eundem numerum primum dividitur, et tunc multiplicatur, immutata manet; id est; $(a : n) \times n = a$ (Cor. 1.).

Vel $\frac{a}{n} \times n = a$.

Coroll. 5. Si magnitudo per unitatem dividitur, immutata manet, id est 1 non dividit, seu $a : 1 = a$.

Est enim $a \times 1 = a$. Vel $\frac{a}{1} = a$.

Coroll. 6. Si aequalia per aequalia dividantur; quoti aequales sunt, Id est, si
$a = b$ et
$n = r$; erit

$\frac{a}{n} = \frac{b}{r}$ seu $a : n = b : r$. Nam in propositione

a:n potest poni *b* loco *a*, et loco *n*, igitur *b*:*r* loco a:n; hinc ambo quoti aequales sunt (§. 4. Cor. 1.).

Coroll. 7. Cum dividendus productum, quotus unum factorem, et divisor alterum repraesentet; (Cor. 1.), dividendus ac quotus homogenei sunt, possuntque quaelibet species magnitudinum esse (magnitudines cujusvis generis, vel nominis), divisor autem semper numerus est (§. 28. Cor. 2.).

Coroll. 8. Si numerus integer per se ipsum dividatur; quotus = 1 est; $a:a = \frac{a}{a} = 1$. Nam $a \times 1 = a$.

Coroll. 9. Si quotus duorum numerorum integrorum integer quoque numerus sit; erit dividendo dividendum per illum, quotus aequalis divisori, igitur etiam numerus integer. E. g. si $12:3=4$ sit; erit $12:4=3$. Nam cum $12 = 4\times3$ (Cor. 1.) $= 3\times4$ (§. 29. Cor. 8.); erit $12:4=3$ (Cor. 2.). *Seu:* Si productum per unum factorem dividatur; alter factor obtinetur. Id est $ab:a=b$, et $ab:b=a$, (a semel est quotus, et semel divisor) (Cor. 1. 2.).

Coroll. 10. Summa duarum magnitudinum dividitur per numerum integrum; si quaevis singulatim per hunc dividatur, et quoti addantur. E. g. $(12+8):4=(12:4)+8:4)$. Nam $(12:4+8:4)\,4=(12:4)\,4+(8:4)\,4$ (§. 29. Cor. 3.) $= 12+8$ (Cor. 4). *Et etiam,* $(ab+ac): a = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a}$. Nam $\frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} = b + c$;

et $(b+c)\times a = ab + ac$. Igitur $(ab + ac)$: $a = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a}$.

Coroll. 11. Differentia duarum magnitudinum dividitur per numerum integrum; si quaevis singulatim per illum dividatur, et postremus quotus a priori subtrahatur. E. g. $(12-8):4 = (12:4) - (8:4)$. Nam $(12:4 - 8:4)\times 4 = [(12:4)\times 4 - (8:4)]4 = 12 - 8$ (§. 29. Cor. 4.). Et etiam $(ab - ac):a = \frac{ab}{a} - \frac{ac}{a}$. Nam $\frac{ab}{a} - \frac{ac}{a} = b - c$; et $(b-c)\times a = ab - ac$.

Theorema 2.

§. 35. Magnitudo data per numerum integrum n dividitur; si ntesima pars illius sumatur. Id est: $a:n = a\times\frac{1}{n}$.

Demonstratio. $a:n = \frac{a}{n} = \frac{1\times a}{n}$. Si $a = 12$; $n = 4$; erit $12:4 = 3$; at 3 sunt $\frac{1}{4}$ pars de 12; igitur $12:4 = 12\times\frac{1}{4} = \frac{12}{4}$.

Coroll. 1. Quodsi igitur magnitudo quaepiam per numerum integrum dividatur; dividendus toties quotum in se continet, quantum efficit divisor. (§. 29.). Si itaque divisor idem maneat; dabit nties major, vel minor dividendus quotum nties majorem vel minorem, v. g. 12 : 3 bis major quotus est, quam 6 : 3, et 6 : 3 bis minor est, quam 12 : 3. Si vero dividendus constans manet;

dabit nties major divisor nties minorem, et nties minor divisor nties majorem quotum. E. g. 24 : 12 quater minus est, quam 24 : 3; nam 24 : 12 = 2, et 24 : 3 = 8.

Coroll. 2. Si igitur dividendus per numerum integrum multiplicetur, aut dividatur; istud tantundem est, ac si quotus ipse per illum multiplicetur, aut dividatur. E. g. $(12 \times 4) : 3 = (12 : 3) \times 4$; et $(12 : 4) : 3 = (12 : 3) : 4$. Nam

$$\frac{12 \times 4}{3} = \tfrac{12}{3} \times 4; \text{ et } \tfrac{12}{4} : 3 = \tfrac{12}{3} : 4.$$

Id est, si dividendus per 4 multiplicatur; futurus est quater major (§. 29.), et si per 4 dividitur; quater minor fit (Theor. 2.), igitur et quotus in primo casu quater major, et in secundo quater minor fit (Cor. 1.). Ergo id tantundem est, ac si in primo casu per 4 multiplicatus (§. 29.), et in altero per 4 divisus fuisset (Theor. 2.).

Coroll. 3. Si autem *divisor* per integrum numerum *multiplicetur;* id tantundem est, ac si quotus per illum *dividatur:* et si divisor per numerum integrum *dividatur;* id tantundem est, ac si quotus per illum *multipticetur.* E. g. $24 : (4 \times 2) = (24 : 4) : 2$; et $24 : (4 : 2) = (24 : 4) \times 2$. Nam

$$24 : (4 \times 2) = \frac{24}{4 \times 2} = 24 : 8 = 3 = (24 : 4) : 2 = 6 : 2 = 3.$$

Et $24 : (4 : 2) = 24 : \tfrac{2}{4} = \tfrac{24}{4} \times 2 = 6 \times 2$. Id est, si divisor per 2 multiplicatur; bis major evadit (§. 29.), et si per 2 dividitur; bis minor fit (Theor. 2.), ergo quotus in casu primo bis minor, et in secundo bis major (Cor. 1.) fit, itaque id tantundem est, ac

ſi in caſu primo per 2 diviſus (Theor. 2.), et in ſecundo per 2 multiplicatus fuiſſet (§. 29.).

Coroll. 4. Si itaque dividendus et diviſor per eundem numerum integrum multiplicentur, aut dividantur; magnitudo quoti invariata manet.

E. g. $4:2 = \frac{4\times 3}{2\times 3}$; et $12:6 = \frac{12}{3} : \frac{6}{3}$, ſeu $= (12:3):(6:3)$. Nam dividendum per numerum integrum multiplicare tantundem eſt, ac quotum per illum multiplicare (Cor. 2.), et diviſorem per illum multiplicare tantundem, ac quotum per illum dividere (Cor. 3.). Ergo quantitas quoti immutata manet (§. 34. Cor. 5.). Eodem modo, dividendum per integrum numerum dividere tantundem eſt, ac dividere quotum per illum (Cor. 2.), et diviſorem per illum dividere tantundem, ac multiplicare quotientem per illum (Cor. 3.). Ergo et hic quantitas quoti invariata manet (§. 34. Cor. 4).

Vel: $\frac{4}{2} = \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = \frac{4\times 3}{2\times 3}$. Nam ſit $\frac{4}{2} = a$;

erit $4 = 2\,a$; et
$3 = 3$; hinc

$4\times 3\times 2\,a\times 3 = 2\times 3\times a$; et

$\frac{4\times 3}{2\times 3} = \frac{2\times 3\times a}{2\times 3} = a$. Ergo

$\frac{4\times 3}{2\times 3} = \frac{4}{2}$. *Tum* ad ſecundum:

$12:6 = \frac{12}{3} : \frac{6}{3}$ ſeu $= (12:3):(6:3)$.

Nam ſit $\frac{12}{6} = a$; erit

$12 = 6a$, et

$\frac{12}{3} = \frac{6a}{3}$ ſeu $= \frac{6}{3} \times a$. Ergo

$\frac{12}{3} : \frac{6}{3} = (\frac{6}{3} \times a) : \frac{6}{3}$, vel

$\frac{12}{3} : \frac{6}{3} = a = 12 : 6$.

Propoſitiones immediate clarae diviſionis per numeros integros.

§. 36. 1) Si majus et minus per eundem integrum numerum dividantur; primus quotus major eſt ſecundo.

$$\frac{a}{5} > \frac{b}{5};\ \text{ſi } a > b.$$

2) Si majus per minorem numerum integrum dividatur, quam minus; primus quotiens major eſt ſecundo.

Si $a > b$ et
$5 < 7$; erit

$$\frac{a}{5} > \frac{b}{7}.$$

3) Si magnitudo per majorem et minorem numerum dividatur; primus quotus minor eſt ſecundo. $a = a$
$4 > 3$

$$\frac{a}{4} < \frac{a}{3}.$$

4) Si duo inaequales quoti aequales diviſores habuerint; dividendus majoris major erit di-

videndo minoris; E. g. si $a : 4 > b : 4$ vel $\frac{a}{4} > \frac{b}{4}$; erit $a > b$.

5) Si duo inaequales quoti aequales habuerint dividendos; divisor minoris major erit divisore majoris. E. g. Si $a : n > a : r$, seu $\frac{a}{n} > \frac{a}{r}$; erit $r > n$ vel $n < r$.

6) Inter duos aequales quotos, ille majorem habet divisorem, cui major dividendus est, et vice versa. E. g. Si $24 : 8 = 18 : 6$; erit cum $24 > 18$, etiam $8 > 6$, et si $8 > 6$ est; erit $24 > 18$.

7) Si numerus integer per minorem dividatur; quotus major est unitate (1), et vice versa. E. g. $3 : 2 > 1$; et si $3 : 2 > 1$; erit quoque $3 > 2$.

8) Si numerus integer per majorem dividatur; quotus minor est unitate, et vicissim. E. g. $2 : 3 < 1$; et si $2 : 3 < 1$; erit $2 < 3$.

Problema 6.

§. 37. Dividere datum numerum integrum per datum minorem.

Resolutio. 1) Numerum dividendum virgulis conclude, et divisorem praefige.

2) A sinistris operari incipe, et divide; id est: investiga, divisor in quot figuris dividendi, et quoties contineatur, quotumque post dextimam lineam scribe. Hoc est: de altissimis cyfris dividendi tot accipiantur, quot divisor

continet, vel si dent numerum, qui minor sit divisore, adhuc una plus; et investigetur, per quem primorum 9 numerorum divisor multiplicari debeat, ut numerus praedictarum altissimarum cyfrarum accurate, vel saltim quam proxime obtineatur. Si divisor unica cyfra constet; quaesita cyfra in tabula pythagorica repraehenditur (§. 31.). Quodsi ille autem pluribus constet; tam diu per aliquot primorum 9 numerorum multiplicandus erit, donec praedictus numerus ipse, vel proxime major evenerit, ubi tum in casu postremo illa cyfra quaesita erit, quae proxime minor fuerit.

3) Multiplica; id est: divisorem per quotum hoc modo inventum multiplica, et factum infra divisas figuras colloca.

4) Subtrahe; id est: factum e quoto in divisorem a divisis figuris subtrahe, quod si factum id figuris dividendi majus est: quotum unitate minue; si vero residuum excedat divisorem; quotum unitate auge.

5) Pone notam; id est; residuo si quod est, adde sequentem notam dividendi, rursumque divide, multiplica, subtrahe, pone notam; idque continua, donec nulla nota supersit; postremum residuum scribe in loco quoti cum subscripto divisore.

6) Si divisor in notis dividendi non continetur; quoti loco zerum adscribe, et sequenti dividendi nota adjecta opus prosequere.

7) Si in fine divisoris, et dividendi zeri adsunt, utrinque aequalem earum numerum reseca,

et reliquis notis divide. E. g. Sit numerus 634348 dividendus per 4.

Operatio.

```
Diviſor | Dividendus | Quotus
      4 | 634348     | 158587
        | 4:::::
        | ——::::
        | 23::::
        | 20::::
        | ——:::
          34:::
          32:::
          ———::
           23::
           20::
           ———:
            34:
            32:
            ———
             28
             28
             ——
              0.
```

Demonſtratio. Efformatur, ſi dividendus in ſuas partes decadicas reſolvitur, et tum quaevis pars dividitur. Diviſio nempe nihil aliud eſt, quam diſtributio producti in ſuos factores, quo modo ergo multiplicatio productum componit, eo modo illud diviſio iterum reſtituere debet. Sed id ſit per praedictas regulas, ergo rite peragitur diviſio *hac ratione*.

Eſſet ergo $\frac{634348}{4} = \frac{400000}{4} + \frac{200000}{4} + \frac{32000}{4} + \frac{2000}{4} + \frac{320}{4} + \frac{28}{4}$.

Seu

$$\frac{634348}{4} = 100000 + 50000 + 8000 + 500 + 80 + 7,$$

et igitur $\frac{634348}{4} = 158587$. Nam

$$\begin{array}{r} 158587 \\ 4 \\ \hline 28 \\ 320 \\ 2000 \\ 32000 \\ 200000 \\ 400000 \\ \hline 634348. \end{array}$$

Exempla. 1) Dividere 684 per 4. Erit

$$4 \,\Big|\, \begin{array}{r} 684 \\ 4 \\ \hline 28 \\ 28 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 0. \end{array} \,\Big|\, 171$$

Nam $\frac{684}{4} = \frac{400}{4} + \frac{280}{4} + \frac{4}{4}$, seu

$$\frac{684}{4} = 100 + 70 + 1 = 171.$$

Vel ita:

$$4 \,\Big|\, \begin{array}{r} 684 \\ 400 \\ \hline 484 \\ 280 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 0 \end{array} \,\Big|\, 171$$

Nam

$$\begin{array}{r} 171 \\ 4 \\ \hline 4 \\ 280 \\ 400 \\ \hline 684. \end{array}$$

2) Dividere 684 per 12.

12	684	57	Est enim
	60		$\frac{684}{12} = \frac{600}{12} + \frac{84}{12} = 50 + 7$; seu
	84		
	84		$\frac{684}{12} = 57$. Id est, $57 \times 12 = 684$.
	0		

3) Dividere 200000 per 200. Erit:

2(00	2000(00	1000	Est enim
	2		$1000 \times 2 = 2000$; vel quod idem est,
	0		$\frac{200000}{200} = 1000$.
	0		
	0		
	0		
	0		
	0		

4) Dividere 144000 per 112. Erit:

112	144000	$1285\frac{80}{112}$	Est enim
	112		$(1285 + \frac{80}{112}) \times 112 =$ $= 144000$, si actu multiplicatur.
	320		
	224		
	960		
	896		
	640		
	560		
	80		

Coroll. 1. Si igitur numerus integer per minorem dividitur, quotus vel est numerus integer, vel summa numeri integri et quoti ex residuo per divisorem, hic posterior autem jam minor est, quam 1, et residuum est minus, quam divisor, id est, si numerus integer quoti r, residuum u, et divisor n sit; erit quotus $= r + \frac{u}{n}$, et $\frac{u}{n} < 1$, atque $u < n$.

Coroll. 2. Si inventus numerus in quoto integer per divisorem multiplicetur, et producto residuum addatur; obtinetur dividendus (§. 34. Cor. 1.), hocque igitur simul examen est, an rite fuerit divisum.

Definitio 21.

§. 38. *Mensura* numeri integri (Theiler) sunt divisores, qui illum accurate dividunt, *mensura maxima*, est maximus illorum divisorum, qui si numerus datus solus sine comparatione ad alium spectetur, semper est numerus datus, quilibet enim numerus se ipsum semel continet. *Mensura communis* duorum aut plurium numerorum est communis divisor utriusque; *maxima communis*, est maximus utriusque numeri divisor. Ita 12 habet mensuram 2, 3, 4, 6, ex quibus praeter ipsum numerum 12, mensura maxima 6 est; 12 vero et 24 habent communem mensuram 4, maximam vero ipsum 12.

Coroll. 1. Quodsi itaque numerus n mensura alterius m sit; datur semper numerus integer r, qui $= m : n = \frac{m}{n}$ (per defin.), et qui ergo per

Schol. 1. Omnes numeri sunt divisibiles per 2, quorum unitates per 2 divisibiles sunt, vel quorum locum infimum (unitatum) 0, 2, 4, 6 vel 8 occupant.

Equidem cum 10 per 5 divisibilis sit; quivis numerus per 5 divisibilis est, cujus unitates per 5 divisibiles sunt, vel cujus infimus locus 0 vel a quinario occupatur.

Schol. 2. Quivis numerus divisibilis est per 3; cum primum residua omnium cyfrarum ejus addita summam dant, quae per 3 dividi possit. Ita 54672 per 3 divisibilis est, quia residuum

de 5 = 2
de 4 = 1
de 6 = 0
de 7 = 1
de 2 = 2

Summa = 6 : 3 = 2 sine residuo.

Schol. 3. Facile itaque indicatu est, an numerus datus per 2, 3 vel 5 divisibilis sit; utrum vero talis per 7, 11, 17, 19 vel per altiorem numerum (primum, de quo inferius) dividi possit; id tantum actuali operatione (tentatione) disceptari potest.

Nulla itaque alia ratio datur inveniendi omnes factores numeri dati, quam ut ille per minimos numeros primos tam diu dividatur, donec quotus ipse demum sit numerus primus, et itaque cum reliquis mensuris omnes factores simplices numeri dati efficiat.

Problema 7.

§. 39. Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum integrorum.

Resolutio. Dividatur numerus major per minorem (§. 37.). Si residuum remaneat; dividatur per illud divisor. Si iterum residuum adsit; dividatur per illud iterum posterior divisor, et sic continuetur divisio, donec nullum residuum supersit, demum postremus divisor est mensura maxima quaesita. E. g. pro numeris 966 et 10051 ita procedatur:

$$10051 : 966 = 10\tfrac{391}{966};$$
$$966 : 391 = 2\tfrac{184}{391};$$
$$391 : 184 = 2\tfrac{23}{184};$$
$$184 : 23 = 8 + 0.$$

Ergo 23 erit communis mensura maxima de 966 et 10051.

Demonstr. Est enim 23 mensura de 184 (§. 38.); ergo et communis mensura maxima de 23 et 184 (§. 38. Cor. 2.), ergo et de 184 et 391 (§. 38. Cor. 8.), ergo etiam de 391 et 966 (§. 38. Cor. 8.), ergo etiam de 966 et 10051 (§. 38. Cor. 8.).

Theorema 3.

§. 40. Si summa numeri integri et quoti, qui minor unitate est, summae alterius numeri integri et quoti, qui etiam minor 1te, aequalis fuerit; non solum ambo numeri integri, verum etiam ambo quoti ipsi aequales erunt. Id est: si $p + (w : u) = q + (m : v)$, et p, q numeri integri, $(w : u)$, et $(m : v)$ vero minores sint, quam 1; erit $p = q$, et $(w : u) = (m : v)$, seu $\frac{w}{u} = \frac{m}{v}$.

Demonstr. Nam ponatur, p et q esse inaequales, v. g. $p > q$; esset $(p - q)$ numerus integer, (§. 27. Cor. 2.). Sit hic $= d$; erit $p = q + d$ (§. 17. Cor. 1.); igitur $q + d + (w:u) = q + (m:v)$ (§. 4. Cor. 1.); igitur $d + (w:u)$ $(m:v)$ (§. 18. no. 1.), itaque $d < (m:v)$ (§. 13. Cor. 1.), id est: numerus integer d esset minor, quam 1. Hoc autem absurdum est (§. 21.). Igitur $p = q$, ergo et $(w:u) = (m:v)$. (§. 18. no. 1.).

Definitio 22.

§. 41. *Quotus* numerorum integrorum jam est per *minimos numeros expressus*, si nulli sit aequalis, qui minores numeros integros pro dividendo et divisore habet. E. g. (3 : 2), seu $\frac{3}{2}$.

Coroll. Quosi igitur quotus numerorum integrorum nondum sit in numeris minimis expressus; datur semper quotus illi aequalis, qui jam per minimos numeros expressus est.

Definitio 23.

§. 42. *Numerus par* ille dicitur, qui per 2 dividuus est, (qui per 2 accurate dividi potest), ii, qui per 2 non sunt divisibiles dicuntur *impares*.

Coroll. Si itaque sub *n* quilibet numerus integer intelligatur, erit semper 2 *n* numerus par, e contrario $(2n + 1)$, vel $(2n - 1)$ numerus impar. Nam $2n : 2 = n$ (§, 34. Cor. 3), ergo numerus integer, ergo est $2 . n$ per 2 divisibilis (§. 38.), ergo numerus par; si autem $2n + 1$ vel $2n - 1$ per 2 dividantur, erit

$$\frac{2n + 1}{2} = n + \frac{1}{2}, \text{ et } \frac{2n - 1}{2} = n - \frac{1}{2};$$

ergo in casu priori quotus $n + (1:2)$ (§. 34. Cor. 11.), et in postremo $n - (1:2)$ (§. 34. Cor. 11.), ergo minime numerus integer. igitur neque $2n + 1$, nec $2n - 1$ per 2 divisibile est (§. 38.), ergo ambo impares numeri.

Coroll. 2. Si igitur loco n secundum ordinem omnes numeri integri 1, 2, 3, 4 etc. substituantur; habebuntur omnes numeri pares et impares in serie sua, nempe

numeri *pares* sunt: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 etc.
numeri *impares*: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 etc.

Coroll. 3. Ergo ntesimus numerus par $= 2n$; ntesimus vero impar $= 2n - 1$.

Definitio 24.

§. 43. Numerus integer praeter se ipsum et unitatem nullum alium divisorem (mensuram) hacens, dicitur *simplex*, vel *numerus primus*, (Primzahl). Numerns autem talis, qui praeter se ipsum et 1, adhuc unum vel plures divisores habet, vocatur *compositus*.

Coroll. 1. Numeri *primi* sunt: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 etc.
Compositi: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 etc.

Coroll. 2. Numeri primi nullam aliam communem mensuram (divisorem) praeter 1. habent. Quivis enim eorum habet quidem adhuc se ipsum, nullum autem de aliis pro mensura (defin. 24.).

Coroll. 3. Ergo quotus duorum numerorum primorum jam per numeros minimos expressus est. V. g. 7 : 3, vel 9 : 5.

Scholion. Si in numero quopiam cyfra unitatum numerus par fit; ille per 2 erit divifibilis. Quum illa o eft; per 2, 5, et 10 divifibilis eft. Si fit 5; erit ille per 5 divifibilis. Quodfi vero in numero integro cyfra unitatum fuerit 1, 3, 7, 9; nulla generalis nota characteriftica adaequata datur, difcernendi, utrum numerus ille fit primus, vel compofitus.

Theorema 4.

§. 44. Omnis numerus compofitus *m* eft productum ex meris numeris primis.

Demonftr. Habet enim praeter fe ipfum adhuc diviforem *n* (§. 43.), qui ergo minor eft illo ipfo (§. 38. Cor. 3.). Si hic iterum fit compofitus, habet et hic adhuc minorem diviforem, et hic, fi fit compofitus iterum adhuc minorem diviforem et ita porro. Verum cum divifores hi numeri integri fint (§. 43.); non poffunt in infinitum continuo minores fieri, fed omnium ultimus debet demum 1 effe (§. 21.), igitur penultimus praeter fe ipfum, folum per 1 divifibilis, ergo numerus primus eft (§. 43.). Atqui quivis divifor diviforis de *m*, eft etiam divifor de *m* (§. 38. Cor. 2.). Ergo omnis numerus compofitus *m* aliquem numerum primum *n* pro divifore habet. Datur autem, fi *n* fit divifor de *m*, talis numerus integer, *r*, ut $m = r \times n$ fit (§. 38. Cor. 1.). Quodfi itaque etiam *r* numerus primus fit; erit *m* productum ex numeris primis *r*, *n*, ergo propofitio *vera*. Si vero *r* compofitus fuerit; habebit *r* numerum primum *u* pro divifore (p. demonftr.), ergo erit $r = v \times u$ (§. 38. Cor. 1.), igitur $m = v \times u \times n$, hinc, fi *v* etiam numerus fit primus, iterum erit propofi-

tio *vera*. Quodſi vero *v* compoſitus fuerit; habebit rurſus numerum primum *w* pro diviſore, ita ut $v = x \times w$, ergo $m = x \times w \times u \times n$ ſit. Hac ratione productum *m* ex pluribus ſemper numeris primis *u*, *n*, *w*, etc. tanquam factoribus componitur, quamdiu vel unus de factoribus omnibus v. g. *r*, *v*, *x* etc. compoſitus fuerit, At $m : n = r$; $r : u = v$; $v : w = x$ (§. 34. Cor. 2.), ergo $r < m$, $v < r$, $x < v$ (§. 35.), id eſt: factores *r*, *v*, *x* etc. ſemper minores evadunt, quamdiu vel unus compoſitus ſit, ſequens autem ſemper eſt diviſor proxime praecedentis, e. g. *v* eſt diviſor de *r*, *x* eſt diviſor de *w* etc. (§. 34. Cor. 9.), igitur, ut prius clarum eſt, in fine ad factorem quemdam ultimum deveniri, qui jam eſt numerus primus, ergo *m* productum ex meris numeris primis fieri debere.

Theorema 5.

§. 45. Productum ex meris numeris primis non poteſt aequale eſſe producto alicui numerorum integrorum, quod vel unicum de illis diverſum numerum primum pro factore habeat. E. g. Non poteſt $13 \times 3 = 7 \times n$, vel $13 \times 3 \times 5 = 7 \times n$ eſſe, quicunque numerus integer loco iſtius *n* aſſumatur.

Demonſtr. Nam quodſi $13 \times 3 = 7 \times n$ foret; eſſet $13 : n = 7 : 3$ (§. 34. Cor. 2.). At quotus $7 : 3$ jam per numeros minimos eſt expreſſus (§. 43. Cor. 3.), ergo $13 : 7$ eſſet numerus integer, ergo 13 per 7 diviſibilis numerus (§. 38.); igitur non primus (§. 43.). Cum jam hoc contra poſitionem ſit; non poteſt ergo $13 \times 3 = 7 \times n$ eſſe.

Idcirco neque $13 \times 3 \times 5 = 7 \times n$ eſſe po-

test, nam secus foret $(13 \times 3) : n = 7 : 5$ (§. 34. Cor. 2.), igitur, cum $(7 : 5)$ jam per minimos numeros expressus sit (§. 43. Cor 3.), $(13 \times 3) : 7 =$ numero integro r, ergo $13 \times 3 = r \times 7$ (§. 34. Cor. 1.), quod ob prius probatum, absurdum est. Et ita propositio generaliter vera est, ex quotquot numeris primis etiam productum compositum sit.

Coroll. Cum omnis numerus compositus productum sit ex meris numeris primis (§. 44.); quivis numerus compositus suos determinatos numeros primos pro factoribus habet, ita, ut, si vel unicus eorum varietur, tum jam alius numerus compositus oriatur, v. g. 21 nullos alios numeros primos pro factoribus habet, quam 3 et 7; numerus 12 nullos alios praeter 2, 2, 3.

Definitio 25.

§. 46. Si duo aut plures numeri integri excepta unitate (1), nullam communem mensuram vel divisorem habent; tum dicuntur *primi inter se.* Si autem praeter 1 adhuc communem divisorem habent, audiunt *compositi inter se.* E. g. 3 et 5, 4 et 9 sunt primi inter se; 9 et 15 vero, vel 5 et 35 sunt compositi inter se.

Coroll. 1. Ergo omnes numeri primi etiam primi inter se sunt; e. g. 5 et 7, similiter 11, 13, 19, (§. 43. Cor. 2.).

Coroll. 2. Numeri compositi possunt tamen primi inter se esse, e. g. 4 et 9, 8 et 15.

Coroll. 3. Si dividendus et divisor numeri primi inter se sint; quotus jam per minimos numeros expressus est (§. 41. Cor. 1), et si quotiens duo-

rum numerorum integrorum jam in minimis numeris expressus fuerit; hi erunt primi inter se (§. 41.).

Caput II.

De Reductione numerorum mixtorum heterogeneorum reducibilium; item de eorumdem Additione, Subtractione, Multiplicatione et Divisione.

Definitio 26.

§. 47. Quantitates *mixtae* heterogeneae, de quibus hic agitur, sunt, quae res diversae speciei aut denominationis continent, ita tamen, ut species minor in majori contineatur. Numeri mixti exprimunt *pretia* et *mensuras*. Pretii nomine varia monetae genera; per mensuras; pondera, item mensurae liquidorum, aridorum, continuorum, et distantiarum intelliguntur.

Scholion. Volenti numeros heterogeneos reducere, addere, subtrahere etc. necessarium est scire, quotnam unitates speciei minoris requirantur ad efficiendam unitatem speciei majoris. Quare aliquot tabulas specierum apud nos in frequentiore usu positarum praevie adferre lubet.

Tabula I.

Mensurarum vulgarium. seu longitudinis.

1 Hexapeda est	=	6	pedibus (Schuh.).
1 Pes	=	12	digitis (unciis, Zoll.).
1 Digitus	=	12	lineis.
1 Linea	=	12	punctis (Punkt.).

Tabula II.

Ponderum civilium, ſeu Mercatorum Noſtratium.

1 Centenarius eſt	=	100	libris (Pfund) (℔.).
1 Libra	=	32	ſemiunciis (Loth).
1 Semiuncia	=	4	drachmis (Quintel).

Tabula III.

Ponderum Apothecariorum Noſtratium.

1 Libra Apothec. eſt	=	12	unciis.
1 Uncia	=	8	drachmis.
1 Drachma	=	3	ſcrupulis.
1 Scrupulus	=	20	granis.

Tabula IV.

Temporis vulgaris.

1 Dies eſt	=	24	horis.
1 Hora	=	60	minutis primis.
1 Minutum primum	=	60	minutis ſecundis.
1 Minutum ſecundum	=	60	minutis tertiis.

Tabula V.

Monetae generum.

Aureus regius (Souverändor) valet		13 Rh.	20 cr.
Dimidiatus aureus regius valet	- -	6 Rh.	40 cr.
Cremnicenſis aureus valet - - - -		4 fl.	30 cr.
Uncialis Joachimicus (ein harter oder Species - Thaler) - - - - -		2 fl.	- -
Imperialis (ein Reichsthaler) valet	-	1 fl.	30 cr.
Uncialis coronatus (Kronenthaler) -	-	2 fl.	16 cr.
Rhenenſis vulgaris (florenus) - - - -			60 cr.
Florenus coronatus (Kronengulden)	-	1 fl.	8 cr.
Didrachma (Zwanziger) - - - - - -			20 cr.
Septemdenarius (Siebenzehner) - - -			17 cr.

Denarius vel Drachma (Zehner) - - - -	10 cr.
Septenarius (Siebner) - - - - - - -	7 cr.
Quinarius, vel Victoriatus (Fünfer) - -	5 cr.
Boemicus, vel Groſſus - - - - - - -	3 cr.

Crucifer, vel As (Kreuzer) valet 4 teruncios, vel 8 hallenſes (Häller).

Tabula VI.

Menſurarum Liquidorum,

Dolium (ein Faſs) eſt	=	10 urnis (Eimer).
1 Urna (Eimer)	=	40 menſuris (Maaſs),
	vel	20 congiis (Töpfe).
1 Menſura (Maaſs)	=	2 quartariis (Quart),
	vel	4 acetabulis (Seidel)
1 Acetabulum (Seidel)	=	2 cyathis (Quartirl).

Tabula VII.

Menſurarum Aridorum.

Modius (Metzen) continet -	4 quadrantes
Quadrans (Viertel) - - - -	2 choenices (Achtel).
Chenix continet - - - -	2 heminas majores,
	vel 4 minores (Maſſel).
Hemina (Maſſel) maj. continet	4 quartarios.

Diviſio chartae huc referenda,

Volumen majus (Ballen), continet volumina minora (Rieſs) - - -	10.
Volumen minus continet ſcapos (Buch) - -	20.
Scapus continet philiras - - - - - -	24.

Tabula VIII.

Mensurarum Distantiarum.

Milliare austriacum est	=	4 quadrantibus.
Quadrans	=	1000 orgiis.
Milliare austr.	=	4 Italicis.

Tabula IX.

Ponderum aurifabrorum.

1) *Pondera auri:*

Libra continet Selibras (Mark) - - - -	2.
Selibra (eine Mark) continet Duellas - - -	24.
Duella (Karat) Quadrantes (Gran) - - - -	4.
Quadrans continet Trientes (Grän) - - - -	3.

2) *Pondera argenti:*

1 Drachma est	=	4 denier.
1 Semiuncia	=	4 drachmis (Quintel).
1 Selibra (Mark)	=	16 semiunciis (Loth).

Tabula X.

Mensurarum arcuum circuli.

Circulus integer est	=	360 gradibus.
1 Gradus	=	60 minutis primis.
1 Minutum primum	=	60 minutis secundis.
1 Minutum secundum	=	60 minutis tertiis.

Problema 8.

§. 48. Quemcunque numerum mixtum heterogeneum *resolvere* ad datam speciem minorem, seu inferiorem.

Resolutio. Multiplicetur species per eum numerum speciei minoris, qui numerus adaequat unitatem speciei superioris, seu majoris, id est; notae speciei majoris multiplicentur per numerum speciei minoris, quem complectitur species major, producto addantur notae, si quae adsunt speciei minoris. E. g. Sint resolvendae 100 urnae in mensuras. Erit 100 urnae $\times$ 40 $=$ 4000 mensuris (Tabula VI.).

Coroll. Si species major resolvenda sit ad speciem minorem non proxime sequentem, sed remotiorem, ita ut inter eam speciem, quae reducenda est, et eam, ad quam illa reducenda est, una vel plures aliae species intermediae intercedant, ut si e. g. 100 dies essent ad minuta secunda reducendi, gradatim hoc modo procedendum est: data species major resolvatur imprimis ad minorem speciem proxime sequentem; deinde factum ex hac reductione enascens ad aliam minorem speciem proxime sequentem resolvatur, et sic porro gradatim, usque dum ad eam ipsam speciem perveniatur, ad quam ut species major resolvatur, exigebatur. Ergo in exemplo allato erit 100 dies $=$ 100 $\times$ 24 horis $=$ 100 $\times$ 24 $\times$ 60 Minutis primis $=$ 100 $\times$ 24 $\times$ 60 Minutis secundis $=$ 2400 $\times$ 3600 $=$ 8640000 Secundis.

Quod si tamen notus esset is datae speciei minoris numerus, cujus unitates adaequant unitatem datae speciei majoris; non foret necesse dicto modo gradatim procedere: sed illico poterit species major ad minorem resolvi, scilicet

multiplicando per numerum datae speciei minoris. Ita 100 dies vel 2400 horae = 2400 × 3600 secunda. Et 15 flor. = 15 × 60 crucif.; ubi non est necesse florenos primum ad grossos resolvere.

Problema 9.

§. 49. Quemcunque numerum mixtum heterogeneum reducibilem *reducere* ad datam speciem majorem, seu superiorem.

Resolutio. Dispiciatur, quotnam unitates speciei minoris reducendae, aequivaleant unitati speciei majoris, et per numerum earum unitatum dividatur datus numerus reducendus; quotus enascens exprimet eundem numerum ad datam speciem majorem jam reductum. E. g. 360 cruciferi dant, 360 : 60 = 6 flor.

Schol. 1. Si quod residuum manserit ex divisione; illud erit ejusdem speciei cum dividendo. E. g. Si 314 cruciferi dentur ad florenos reducendi; hoc numero per 60 diviso, quotus est = 5, et praeterea manet 14. Hoc itaque residuum designat cruciferos; ut adeo 314 cruciferi aequivaleant 5 flor. et praeterea 14 cruciferis. Ergo 314 crucif. = $\frac{314}{60}$ flor. = 5 flor. + 14 cruc.

Schol. 2. Reductio numerorum fractorum ad minores species, dabitur in disciplina de fractionibus suo loco.

Problema 10.

§. 50. Numeros mixtos heterogeneos addere.

Resolutio. Species similes similibus subscribantur, et addantur, summaeque singulae, si opus ad majores species reducantur, residuum subscribatur, et quotus speciei majori addatur. E. g.

Sint 12° $5'$ $8''$ $10'''$ et
3 . 4 11 8 addenda; erit

Summa = 15° $9'$ $19''$ $18'''$, id est:
16° $4'$ $8''$ $6'''$.

Signa ($^{\circ}$), ($'$), ($''$), ($'''$) cyfris suprascripta designant orgias, pedes, digitos, lineas,

Sint addendi: 30 flor. + 30 cruc. + 3 terunc.
14 + 14 + 2
15 + 29 + 3; erit

Summa = 60 flor. + 24 cruc. + 9 terunc.

Problema II.

§. 51. Numeros mixtos heterogeneos subtrahere.

Resolutio. 1) Similes sub similibus locentur, et subtrahantur.

2) Si inferior nota major sit superiore: sumatur unitas a proxima specie, atque in minorem resolvatur, et minuendo addatur. E. g.

Sit 6° $4'$ $10''$ minuendus, et
4 5 9 subtrahendus; erit

1° $5'$ $1''$ = differentiae.

5 12
Sit 10° $0'$ $0''$ min.
$8.$ $4.$ $8.$ subtrahendus; erit

1° $1'$ $4''$ = differentiae.

$$\begin{array}{l} \text{Sit } \overset{60}{69} \text{ flor.} + 40 \text{ cruc. min.} \\ \phantom{\text{Sit }} 40 \text{ flor.} + 50 \text{ cruc. subtrahend.; erit} \\ \hline \phantom{\text{Sit }} 28 \text{ flor.} + 50 \text{ cruc. differentia.} \end{array}$$

Problema 12.

§. 52. Numeros mixtos heterogeneos reducibiles multiplicare per numerum integrum.

Resolutio. Singulae species a minima incipiendo multiplicentur, et facta ad majores species reducantur, proximisque addantur. E. g.

$$\begin{array}{l} \text{Sint } 12 \text{ flor.} + 12 \text{ cruc.} + 3 \text{ tenunc. multipl.} \\ \text{per } \qquad\qquad\qquad\qquad 4;\ \text{erit} \\ \hline \qquad 48 \quad + 48 \quad + 12, \text{ et reductione} \end{array}$$

facta 48 flor. 51 crucifer.

Et $(6^{\circ}\ 4'\ 5'') \times 4 = 24^{\circ}\ 16'\ 20''$; et reductis, erit $26^{\circ}\ 5'\ 8''$ productum.

Scholion. 1. Si numeros mixtos heterogeneos multiplicare cupis, qui tamen sunt ejusdem generis; singulas species majores resolvas in speciem minimam, totumque in unam summam collige. Deinde summas factorum multiplica. Denique factum ex hac multiplicatione enascens rursus ad speciem majorem reduc, bis dividendo per unitatem superiorem. E. g.

$$\begin{array}{l} 3 \text{ flor. } 40 \text{ cruciferos per} \\ 4 \text{ flor. } 20 \text{ cruc. multiplicare. Erit} \\ \hline 3 \text{ flor. } 40 \text{ cruc.} = 3 \times 60 + 40 = 180 + 40 = 220 \text{ cr.} \\ 4 \text{ flor. } 20 \text{ cruc.} = 4 \times 60 + 20 = 240 + 20 = 260 \text{ cr.} \end{array}$$

Ergo (3 flor. 40 cruc.) $\times$ (4 flor. 20 cruc.) = 220 $\times$ 260 cruc. = 57200. Id productum debet

per 60×60 dividi, et erit = 15 flor. 53 cruc. $1\frac{1}{3}$ terunc.

Sahol. 2. Multiplicatio in numeris mixtis heterogeneis, si multiplicator non est numerus integer, sed heterogeneus cum multiplicando, seu diversae speciei, jam divisionem et doctrinam de fractionibus supponit, quare illi ibi locus erit.

Problema 13.

§. 53. Mixtos numeros heterogeneos per integros numeros dividere.

Resolutio. Primum, majores species dividantur, tum minores; residuum majoris speciei in minorem convertatur proximam, eidemque addatur. E. g. Sint dividendi 36 flor. 26 crucif. 3 terunc. per 4. Erit:

Operatio:

4 | 36 fl. 24 cr. 3 ter.	9 flor. 6 cruc. 2 ter. $\frac{3}{4}$.
36	Est enim
0 + 26 cruc.	9 flor. 6 cruc. 2 ter. $\frac{3}{4}$
24	36 fl. $+ 24$ cr. $+ 8 + \frac{3\times4}{4}$ ter.
2 cruc.	seu 36 flor. 26 cruc. 3 terunc.
4	
8	
3	
11 ter.	
8	
3	

Sint dividendi: 100 centenarii et 30 semiunciae per 3. Erit:

3 | 100 centen. 50 sem. | 33 cent. 50 semiunc.
Est enim 33 cent. 50 sem.
3
99 cent. 150 sem.
seu 100 cent. 50 sem.

9
10
9
1
100
100
50
150
150

Sint dividendi $14^{\circ}\ 5'\ 8''$ per 4. Erit:

4 | $14^{\circ}\ 5'\ 8''$ | $3^{\circ}\ 4'\ 5''$. Est enim $3^{\circ}\ 4'\ 5''$
4
$12^{\circ}.\ 16'.\ 20''.$ seu
$14^{\circ}\ 5'\ 8''.$

12
2
6
12
5
$17'$
16
1
12
12
8
$20''$
20
0.

Schol. 1. Diviſio numerorum mixtorum, ſi diviſor ſit diverſae ſpeciei cum dividendo, vel non ſit numerus integer, ſupponit jam doctrinam de fractionibus, poteſtque varia methodo peragi. Vide inferius.

Schol. 2. Si numeros mixtos heterogeneos reducibiles per datum numerum aliter dividere cupis; ſingulas ſpecies majores reſolvas in ſpeciem minimam, totumque in unam ſummam collige. Deinde ſummam hanc per datum numerum divide. Denique quotum ex hac diviſione enaſcentem rurſus ad ſpecies majores reduc.

E. g. $14^{\circ}.\ 5'.\ 8'' = 269''.$	Nam 14°
4	6
Et $269'' : 12 = 22'.\ 5''.$	84
24	5
29	$89'$
24	12
5	178
	898
	$1076'' : 4 = 269''.$
	8
	27
	24
	36.

Et $22'\ 5'' = 3^{\circ}\ 4'\ 5''.$

Schol. 3. Multiplicatio et diviſio in numeris mixtis heterogeneis facili modo etiam peragitur; ſi dati id genus numeri, primum ad fractiones vulgares reducantur, et tum multiplicentur vel dividantur. Sed de illis tractabimus ſpeciali Capite (Vid. part. 2dam, Caput III. Sect. tertiae).

§. 54. His pertractatis agendum jam esset de fractionibus vulgaribus: at quia earum theoria longe faciliore methodo in Algebra demonstratur, eorum consilium sequimur, qui fractionum pertractationem ad Algebram sive Arithmeticam generalem rejiciendam censent.

Pars Secunda.

Arithmetica Universalis

seu

Elementa Algebrae.

Elementa Algebrae.

Sectio Prima.

De primis Calculis algebraicis.

Caput I.

Notiones generales.

§. 1 *Algebra* Recentioribus eſt: Arithmetica Univerſalis, ſeu ſcientia quantitatis abſtractae, et indeterminatae ſeu in genere ſumptae, quam per litteras, quarum ſignificatio etiam indeterminata (generalis) eſt, exprimit. Inde Algebra communi vocabulo *Calculus literalis*, dicitur, nonnulli eam *Arithmeticam ſpecioſam* nominant.

§. 2. In ſenſu ſtricto (proprio) Algebra tantum partem Arithmetices generalis efficit; ſed utiliſſimam ac praeſtantiſſimam. Nempe ope aequationum ax quantitatibus notis incognitas inveſtigat, ac idcirco nihil aliud eſt, quam *doctrina de Aequationibus*. Atque cum omnes Operationes Arithmetices ſecundum leges aequationum et fieri poſſint et

reapse fiant; hinc quoque Arithmetica generalis nomen Algebrae obtinet, utpote ea, quae quantitates incognitas ope cognitarum per aequationes investigat (quaerit).

§. 3. Algebra igitur, calculus literalis, universalis, Arithmetica generalis, unum idemque est.

§. 4. *Functiones* (mutationes), quae cum quantitate (vel numero, vel magnitudine indeterminata), tanquam objecto Algebrae (calculi universalis) fieri et suscipi possunt, sunt: Vel quantitas (quantum) augetur, vel minuitur. Cum augetur; id fieri potest, quod aut una vel plures unitates vel ejus partes supputentur, et tunc *additur;* aut quod ipsamet quantitas semel vel pluries, vel tantum ad partem sumatur, et tunc *multiplicatur.* Si quantitas minuitur; vel semel quantitate determinata minuitur, et tunc *subtrahitur*, vel toties, quoties id fieri potest, ubi ergo determinatur, quoties haec subtracta sit, et tunc *dividitur.*

§. 5. *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio* et *Divisio* itaque sunt Operationes fundamentales cujusvis Arithmetices. At hae 4 Operationes ad duas has reduci possunt: ad *Additionem* et *Subtractionem.* Est enim multiplicatio nihil aliud, quam repetita additio, et divisio iterata subtractio. Quorsum Elevatio ad potentias et Extractio radicum referrendae sint, facili modo demonstrabitur.

§. 6. Signa arbitraria, quibus in Algebra ad functiones (Operationes) insinuandas et designandas utimur sunt:

$+$ Signum Additionis, dicitur *plus* (mehr).

$-$ Signum Subtractionis, dicitur *minus* (weniger).

$\times$ vel (.) vel ( ) ( ) signa Multiplicationis.
: vel linea horizontalis, signum Divisionis.
$=$ vel : : signum Aequalitatis.
$\backsim$ signum Similitudinis.
$\cong$ signum, quod magnitutines sibi invicem congruant.
$>$ signum majoris; $<$ signum minoris; $\surd$ signum radicis extrahendae.

§. 7. Inter *Principia*, quae Algebrae tanquam fundamenta serviunt, omnia ea axiomata numerantur, quae Arithmetica inducit, quibusque nititur.

§. 8. Algebra magnitudines *cognitas* litteris Alphabeti minusculis et quidem primoribus designat, a, b, c, d etc., *incognitas* autem postremis exprimit, x, y, z.

Finis Algebrae in eo consistit, ut ex quantitatibus cognitis incognitae inveniantur, vel ubique evidentia detegatur; si enim haec jam adesset, nulla methodo amplius opus foret hanc inveniendi. Idcirco Algebra omnes functiones quantitatum ad quatuor simplices species reducit, vel potius ope harum operat, hacque ratione finem suum assequitur.

§. 9. Magnitudines, qua objecta Algebrae vel sunt *positivae*, vel *negativae*, id est: una alteri opponitur. *Positiva* quantitas ea est, quae est nihilo major; *negativa*, quae est nihilo minor. Quando 7 flor. possideo, et 7 flor. alicui debeo, tum nihil habeo. Si autem 7 flor. possideo, et 4 flor. debeo; tum possideo actu vel habeo (7 minus 4 $=$ 7 $-$ 4) $=$ 3 Flor. (Id est, 3 flor. $=$ [7 $-$ 4] sunt mei). Quantitates ergo possitivae semper denotant *possessionem* (meum), et negativae *debitum*, hinc dicuntur illae

quanta *activa*, et haec quanta *passiva*. Sunt itaque magnitudines possitivae idem quod *affirmativae*, et negativae idem quod negationes (privationes). Inter magnitudines oppositas igitur semper una positiva altera negativa sit oportet. Ut id rite intelligatur; ponamus seriem numerorum naturalium crescentium et decrescentium. Zerus ut facile concipitur, est limes numerorum:

11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1 | 0 | 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 etc.

Ad dextram quantitates crescant unitate; a sinistris unitate decrescent. Erit a sinistris quivis numerus zero vel nihilo minor: at 1 tantum unitate minor est nihilo; 2 duobus unitatibus, minor Zero, et ita porro. Hoc modo erunt numeri ad dextram positivi, et a sinistris negativi. Hac ratione omnes quantitates repraesentari poterunt. Erit ergo series numerorum positivorum et negativorum haec:

etc. —6, —5, —4, —3, —2, —1 | 0 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 etc.

Ita (—10) est decem unitatibus minor, quam zerus. Ergo quascunque duas (vel plures) quantitates directe oppositas inter se conferamus, e. g. lucrum et damnum, incrementum et decrementum, motum sursum et motum deorsum, etc.; semper una quantitas relate ad alteram sibi oppositam, quantitas negativa est; e. g. damnum respectu lucri, decrementum respectu incrementi, motus deorsum respectu motus sursum, et vicissim.

Signum (+), quantitati praepositum denotat *positivam*; signum (—) quantitati praefixum designat *negativam* magnitudinem esse. Quoniam autem signum (+) simul additionem, et signum (—) simul subtractionem designat; idcirco etiam signum (+) quantitatibus interjectum semper significat, eas additivas, et signum (—) quantitatibus interjectum semper denotat, illas subtractivas esse.

§. 10. Quaelibet magnitudo, per litteram quamvis designari potest, ac in uno eodemque exemplo, *idem* valet. Quaevis litera itaque id valere potest, quodcunque volumus (omnes magnitudines repraesentare potest). Unde, si *a* valeat 100; erit — a idem, quod 100 negativae unitates. Et + a — a = o. Si enim 100 unitates pono, et illas interum aufero (subduco, tollo), nihil habeo. Simili ratione etiam + b — b = o. In eodem Exemplo *alia* litera *aliam* magnitudinem designat; *eaedem* literae *aequalia*, et *diversae* literae *inaequalia* vel *diversa* denotant.

§. 11. *Expressio*, seu *quantitas algebraica* est + una vel plures magnitudines, una vel pluribus literis designatae. Illa dicitur *simplex*, ut, *a*, *b*, *c*; haec dicitur *composita* ut: *ab*, *abcd*. Utraque dicitur *incomplexa*, dum solitarie ponitur ut: *a*, *ab*, *cd*, *df*, *xx*, quae etiam *terminus* vocari solet. Cum per signa operationis (§. 6.) una cum pluribus conjungitur, quantitas *complexa* existit. Quantitas uno termino constans, dicitur *monomia*, duobus *binomia*, etc. in genere pluribus terminis constans, *polynomia* dicitur.

Quantitates (termini, expressiones) *homogeneae* dicuntur hic eae, quae tantum multitudine partium diversae sunt ut: *a* et 2*a*; *b* et 3*b*; *c* et 10*c*. Cyfra, literae praefixa, et *Coefficiens* dicta, quae una cum litera magnitudinem proprie exprimit, nullam hic facit mutationem generis quantitatum (genus earum non mutat), solum illa multitudinem determinat. Ut: 2*b*, 3*b*, 10*b*: duo *b*, tria *b*, decem *b*.

Heterogeneae (expressiones, termini) quantitates autem sunt, quae ex aliis partibus constant,

quam instantes (datae); quae igitur aliis literis, vel majori numero literarum designatae sunt. Ut: *a* et *b*; *a* et *aa*, *c* et 5*cc* etc. heterogeneae sunt. Patet diversitatem, vel dissimilitudinem quantitatum tantum in expressione (repraesentatione) latere, si enim sciatur: quid re vera quaevis litera in oblato casu designet, tunc heterogeneae esse desinunt.

Positivae ac *negativae* quantitates, *non* jam per se (hoc ipso) sunt *heterogeneae*. Potius dici posset, praedicatum: *positivi* ac *negativi*, quantitatibus homogeneis competere, nam solum quantitates homogeneae sibi opponi possunt. Sic $+a$ et $-a$; $-2b$ et b; $+5aa - 6aa$ non sunt quanta heterogenea. Verum $+a$ et $+b$; $-a$ et $-b$; $-a$ et $-aa$ sunt heterogenea quanta,

Caput II.

De Operationibus algebraicis in quantitatibus integris.

§. 12. *Addere*, est invenire quantitatem (expressionem, terminum), quae datis aequalis sit, et *Summa* appellatur.

Unde manifestum est, solas homogeneas quantitates, proprie addi, vel illis alias expressiones (simpliciores) dari posse. Cum enim additio unitates congreget (summet), hae merae unitates ejusdem generis (speciei) esse debent. Ut, sint datae quantitates:

$+a$	Et $-a$
$+a$	$-a$
$+a$; erit	$-a$; erit
$+3a$ = earum summae.	$-3a$ = summae.

Heterogeneae quantitates igitur in unam ſummam (vel ſimpliciorem expreſſionem) reduci non poſſunt. Si attamen addendae ſint; ponuntur deinceps ſuis cum ſignis ($+$ vel $-$) in locum ſummae, Ut, ſint

Ut, ſint	Vel ſint
$+a$	$+a$
$+b$ addenda; erit	$-aa$ addenda; erit
$+a+b=$ ſummae eorum	$+a-aa=$ ſummae.
Sint, $+a$	Sint:
$+a$	$-a$
$-a$ data, erit	$-b$ data; erit
$+a=$ ſummae	$-a-b=$ ſummae.

Quantitates (termini, expreſſiones), ſi ſint aequales (eaedem) tollunt ſe; homogeneae, quae ſibi oppoſitae ſunt, in tantum ſe delent, in quantum ſibi aequantur, id eſt: aequalis numerus partium earum tollit ſe. Quare eſt:

$+a-a=0.$ | $+2a-a=a.$ | $+5b-3b=2b$ | $-3a+5a=2a.$ | $+13a-20a=-7a.$ | $-20a-30a=-50a.$

§. 13. *Corollarium* 1.) *Regulae* additionis algebraicae igitur hae erunt: 1) Cum ſigna ſunt *aequalia* ($+$ et $+$) vel ($-$ et $-$), ac quantitates *homogeneae*: datae quantitates addantur (ſummantur); cum ſunt ſigna *inaequalia* ac quantitates *homogeneae*: datas quantitates *ſubtrahe*, vel earum partes aequales aufer (ubi tum vel poſitiva vel negativa magnitudo remanet, prout vel prior vel poſterior eſt major, plures continet partes). 2) Cum quantitates ſunt *heterogeneae*: ſcribe illas ſuis cum ſignis in loco ſummae.

§. 14. *Coroll.* 2.) Non eſt neceſſe in al-

gebra, ut homogeneae quantitates iterum infra homogeneas ſcribantur, ut in decadica fieri debet, poteſt enim hoc non obſervato additio tamen peragi. Interea id tamen aptius eſt propter proſpectum faciliorem. Signum $+$ (poſitivi) ab initio non ponitur, ſed intelligitur. *Coefficientes*, quantitates homogeneas efficiunt majores vel minores; igitur vel addendi vel ſubtrahendi erunt, prout id ſigna deſiderant.

Exempla.

1.) $a+b-3bb+8c-7ddd$
$-7a+8b-3bb-7c-d$ | addenda;

$-6a+9b-6bb+c-7ddd-d=$ eorum ſumm.

2.) $3a-3b+7c$
$-2a-5b-6c$

$a-8b+c$

3.) $5a-6ac+7ad-e$
$5a-6ac-9ad+f$

$10a-12ac-2ad-e+f$.

4.) Sint $8a-7b-8a+2b-8aa+9c-7c+8bb-x$ addenda; erit $-5b-8aa+2c+8bb=$ ſumm.

Demonſtr. Summa aequatur ſuis actualibus partibus ſimul ſumptis, ſed per datas regulas obſervatas, obtinetur ſumma. vel ejus expreſſio ſimpliciſſima; ergo hac ratione rite peragitur additio algebraica.

§. 15. *Subtrahere* dicitur et eſt, datam quampiam quantitatem ab alia ſubducere, *vel* invenire aliam, quae cum prima datarum aequalis ſit alteri, *vel* invenire differentiam duarum quantitatum. *Vel* invenire expreſſionem differentiae duarum quantitatum ſibi oppoſitarum.

§. 16. *Coroll.* 1. Manifeſtum eſt, quod homogeneae duntaxat quantitates ab invicem ſubtrahi vel ſubduci poſſint, ſi ſibi opponantur, id eſt: ſolum inter quantitates homogeneas differentiam

immediate invenire poſſumus, quia numerum unitatum earum notum habemus, et igitur eas in relationem quampiam ducere (inter ſe conferre) poſſumus. Ita *a* ab *a* ſubducere (ſubtrahere) poſſum, et b, de *b*, et $4a$, ab $2a$, et $3b$, de *b*. Nam *a* ſubtractum ab *a*, tollit ſe $= 0$; *b* ſubductum a *b*, tollit ſe; $4a$ ſubducta ab $2a =$ relinquunt $2a$, ſed haec $2a$ ſunt prioribus $2a$ oppoſita, vel $2a - 4a = -2a$. Sic: $b - 3b = -2b$. Subtrahere ergo hic ſemper eſt idem, ac opponere; igitur ſigna mutanda in contraria, loco ($+$) ponatur ($-$), et loco ($-$) ponatur ($+$) in ſubtrahenda quantitate. Nam in ſubtrahendo locatur oppoſitum. Hinc:

$+a - (a) = a - a = 0.$

$+b - (b) = b - b = 0.$

$4a$ ſubtracta ab uno $a = -4a + a$, vel potius $= a - 4a = -3a$.

$3b$ ſubducta a *b*, vel potius $= b - 3b = -2b$

Porro, ſi ($-a$) ab ($+a$) ſit ſubtrahendum, vel negativa a poſitiva quantitate; id tantundem ſibi vult: ac negativa quantitas opponenda eſt iterum poſitivae, ergo ex ($-a$) nunc ($+a$) fieri debet. Inde:

1.) $+a$ minuendus $-a$ ſutrahendus; $+$ $+2a =$ differentiae.	Idem valet cum ($+a$) ab ($-a$) ſubtrahendum eſt; ut in 2.)
2.) $-a$ minuend. $+a$ ſubtrahend. $-$ $-2a =$ differentiae.	Nam iſtud hic ſignificat: quantitas poſitiva debet ſubſtrahi a negativa; igitur ex ($+a$) ſit ($-a$).

Denique, ſi ($-a$) ab ($-a$) ſubtrahi debeat; primum terminum ($-a$) in ($+a$) mutare debeo, quia ($-a$) opponi debet iſti ($-a$). Ergo ($-$) mutandum erit in ($+$) in ſubtrahendo.

Aliter:

Cum ſubtrahere idem ſit, ac invenire differentiam duarum quantitatum; (+a) et (+a) inter ſe non differunt, ergo erit:

+a minuend. +a ſubtrahend. — o = differentiae.	Vel hoc modo: +a—(+a)=o.	et in operatione ipſa +a +a — o.

Tum (—a) nihil differt ab (—a); igitur erit:

—a minuenedus —a ſubtrahendus + o = differentiae.	Vel hoc modo: —a—(—a)=o.

Et in operatione ipſa: —a minuendus
—a ſubtrahendus.
+
o = differentiae.

Porro (—a) differt ab (+a) quantitate = 2a; igitur erit:

+a minuendus —a ſubtrahendus; + +2a= differentiae.	Vel hoc modo: +a—(—a)=+2a.

Et in operatione ipſa: +a minuendus
—a ſubttrahendus;
+
+2a= differentiae.

Quod hoc modo explicari poteſt: quantitati (—a) deſunt adhuc +2a, donec fiat aequalis ipſi (+a) ergo differentia = + 2a.

Denique $(+a)$ differt ab $(-a)$ quantitate $= -2a$;
ergo

$$\begin{array}{rl} -a & \text{minuendus} \\ +a & \text{ſubtrahendus;} \\ \hline -2a = & \text{differentiae.} \end{array}$$

Vel hoc modo: $-a-(+a)=-2a$.

Et in operatione ipſa:

$$\begin{array}{rl} -a & \text{minuendus} \\ \overset{+}{-}a & \text{ſutrahendus;} \\ \hline -2a = & \text{differentiae.} \end{array}$$

Aliter:

Sint: $(a+b)$ minuendus, et
$(2a-b)$ ſubtrahendus.
Erit $(a+b)-(2a-b)=d=$ differentiae eorum.
Sed $(a+b)-(2a-b)=d$ dat ſecundum (§. 17. Cor. 1. generalis ſubtractionis):
$a+b=d+(2a-b)=d+2a-b$; et aequalibus aequalia addendo, et ſubtrahendo aequalia ab aequalibus:

$$\begin{array}{l} a+b=d+2a-b \\ \overset{-}{+}b\underset{-}{+}2a=\underset{-}{+}2a+b\text{: erit;} \\ \hline a+b-2a+b=d. \end{array}$$

Quod ita ſcribi poteſt:

$$\begin{array}{l} a+b \\ -2a+b. \quad \text{Ergo} \\ \hline -a+2b= \text{differentiae;} \end{array}$$

quia

$$\begin{array}{l} 2a-b \\ -a+2b \\ \hline =a+b \text{ ſunt.} \end{array}$$

Vel
$(a+b)-(2a-b)=-a+2b$; quia $(2a-b)-a+2b=a+b$. (p. defin.).

Quod de binomio ſubtrahendo demonſtratur, poteſt etiam de polynomio demonſtrari. Heterogeneae quantitates ſubſtrahi non poſſunt; ſi hoc tamen praeſtari debeat: mutato cum ſigno in ſubtrahendo, in loco differentiae ponuntur.

§. 17. *Coroll.* 2. Regula subtractionis algebraicae est: mutatis signis subtrahendi in contraria, fiat additio. Sed signum quodvis subtrahendi mutandum est in contrarium; et tunc primum additio fit.

Est enim subtractio inventio differentiae duarum quantitatum, vel ejus quantitatis, quae ad priorem addita secundam det. Sed differentia vera invenitur, dum signa in contraria mutantur, et quantitates more algebraico adduntur. Ergo rite fit subtractio, si secundum datam regulam operatur.

Exempla. 1.) $a - 3d + 8b$ minuendus
$+a - 3d + 3bb$ subtrahendus;
$- \quad + \quad -$

erit $+8b - 3bb =$ differentiae.

2.) $8a - 30.c - 8b$ minuend.
$-8a + 31.c - 3b$ subtrahend.: erit
$+ \quad - \quad +$

$16a - 61.c - 5b =$ differentiae.

3.) $a - b + c$ minuendus
$-2a - b + d$ subtrahendus; erit
$+ \quad + \quad -$

$3a + c - d =$ differentiae.

Scholion. Subtractio peragitur, si in subtrahendo signa debite mutantur; ergo differentia quaesita datarum quantitatum invenitur: si quivis terminus in subtrahendo cum mutato suo signo scribatur. Ita erit: $(3a - 2b) - (3a - b - a) = 3a - 2b - 3a + b + a = b + a$.

Et $5a - 3ab + 6ad - (2a - 3ab - 2ad + a) = 5a - 3ab + 6ad - 2a + 3ab + 2ad - a = 2a + 8ad$.

4.)	$-40048.$ minuendus $+20022.$ subtrahendus; $-$	Nam -60072 $+20024$
	$-60072 =$ differentiae.	$-40048 =$ s.
5.)	$13-4+8.$ minuend, $+12-2+4.$ subtrahend. $- \quad + \quad -$	$=17$ $=14$
	$1-2+4=3=$ differ.	$=\ 3=$differentiae.
6.)	$15+8+10-5.$ min. $12+3-10-2.$ subt. $- \quad - \quad + \quad +$	$=28$ $=\ 3$
	$+\ 3+5+20-3=25$	$25=$differentiae

§. 18. *Multiplicare* est, quantitatem toties sumere, quot altera unitates continet, atque ita sumere, ut altera indicat; vel eam toties ad zerum addere, quoties id altera indicatur. Ut, si *a* quinquies sumo, vel *a* multiplico per 5, vel $(a \times 5)$; habeo $a+a+a+a+a+=5a$; et si 2b septies sumam, habebo $2b+2b+2b+2b+2b+2b+2b=14.b=2b\times7$. Et $7\times a=a\times7=7a$.

Est ergo multiplicatio *repetita* additio. Nam 7 multiplicare per *a* idem est, ac sumere 7, *a*ties (*a* vicibus), vel toties, quot sunt unitates in *a*; sed in *a* sunt *a* unitates, quia $a=1\times a$, ergo $7\times a =a\times7=7a$.

§. 19. Multiplicatio dicitur *peracta* (perfecta), cum in producto nullum occurrit signum. Unde $4\times a$ solum est productum *indicatum*, et 4a jam perfectum.

§. 20. Cyfra, quicum litera (quantitas litera disignata) multiplicata est, dicitur *coefficiens*, dum in producto absque signo multiplicationis stat.

Quaevis litera est productum ex 1 secum ipsa; vel cum sit $a = 1 \times a$, quaevis litera habet 1 pro coefficiente, licet hic nunquam scribatur. Est enim unum $a = 1a = a$.

Tum $a \times b = ab = ba$; et $abc \times d = bcda = abcd$. Nam $a \times b$, et $abc \times d$, designat *a* toties sumendum esse, quoties *b* unitatem continet, et *abc* toties, quot unitates *d* habet. Sed *d* continet (d) unitates, et *b* habet b unitates; ergo $a \times b = ab = ba$; et $abc \times d = dabc = abcd$.

§. 21. Si itaque literae multiplicantur; semper *una litera* (vel plures, si plures multiplicentur) est coefficiens, vel *factor in genere*, quo omnis coeffiiciens, vel quicunque numerus designatur. Est ergo in producto $ab = ba$, vel *a* vel *b* coefficiens; et in producto $abcd = dabc$ etc., vel *a* vel *abc* possunt ut coefficientes considerari.

Cum factor ex pluribus partibus vel terminis constat; parenthesi clauditur, ut: $3a + c$, unus factor, et $3b - a$ alter factor, ita scribuntur: $(3a + c)(3b - a) =$ Producto, quod inventum, *evolutum* dicitur. Ita $(1 + n) \times a = 1a + an = a + an = a + na$. Et $3b + bn = 3b + nb = (3 + n)b$.

§. 22. Quot literae in utroque factore sunt, tot in producto occurere debent; si ambo uno duntaxat termino constent. Ut, $abc \times ab = abcab = aabbc$. Nam $abc \times ab$ tantundem est, ac $(a \times b \times c \times a \times b)$ quod $= aa \times bb \times c = aabb \times c = aabbc$; quia quaevis littera ut factor et simul ut magnitudo ipsa, (pars) considerari potest.

Si factores pluribus constent terminis; omnes termini unius, per omnes terminos alterius multiplicandi sunt, producuntque factum totum.

Quia primo productum partium omnium aequale fit producto summae. Ut:

$$(3+4)(2+3)=7\times5=35=\begin{array}{r}3+4\\2+3\\\hline 6+8\\9+12\\\hline 6+17+12=35.\end{array}$$

§. 23. Quantitates, inter se multiplicandae possunt autem esse vel *ambae positivae*, vel *ambae negativae;* vel *una positiva*, *altera negativa*, vel *una negativa*, *altera positiva*. Ut: $+a\times(+b)$; $-a\times(-b)$; $+a\times(-b)$; $-a\times(+b)$.

Quale signum in his casibus productum habeat, ita *monstratur*:

1.) $+a\times(+b)=+ab$. Quantitas positiva multiplicata per positivam, dat productum *positivum*. Nam $+a\times+4$ indicat: $(+a)$ sumendum esse quater, et semper positive; ergo $a\times4=a+a+a+a=4a$. Eodem modo erit $+a\times(+b)=ba$, id est: $(+b)$ vicibus $(+a)=$ tot vicibus $+a$, quot unitates in $+b$ continentur, est ergo productum positivum.

2.) $-a\times(-b)=+ab$, vel factores negativi dant *positivum* productum. Nam $(-a)\times(-b)$, denotat: $(-a)$ summendum esse *b* vicibus, atque semper negative, id est: $(-a)$ negandum esse *b* vicibus, ergo $(-a)$ ponendum esse *b* vicibus positive. Opponere negativae quantitati aliam negativam aliquoties nihil aliud est, ac illam aliquoties affirmare. Scilicet, quemadmodum negare negationem est affirmare, ita etiam negativam quantitatem per negativam multiplicare, est, factum positivum producere.

3.) Cum $+a$ per $-b$, et 4.) $-a$ per $+b$ multiplicanda sunt; erit $+a\times(-b)=-ab$; et $-a\times(+b)=-ab$. Nam si $+a$ per $-b$ multiplicandum est; toties $+a$ sumendum est, quoties $-b$ unitatem continet, et semper negative (ergo toties $+a$ negandum, quoties b unitatem continet); est ergo $+a(-b)=-ab$, vel potius $=-ba$.

Et si $-a$ per $+b$ multiplicari debeat; toties $-a$ ponendum, quot unitates in b continentur, ergo b (vicibus); hinc $-a\times(+b)=-ba=-ab$. Factores, quorum alter negativus, alter positivus est, dant productum *negativum*.

§. 24. *Coroll.* 1. Signa igitur *aequalia* factorum dant semper productum *positivum* (cum $+$), et *inaequalia* dant ($-$), vel productum *negativum*.

§. 25. *Coroll.* 2. *Regulae* multiplicationis algebraicae ergo sunt:

1.) Coefficientes inter se multiplicentur, literae juxta se (deinceps) ponantur, novoque coefficienti conjungantur; 2.) Producto praefigatur signum ($+$) vel ($-$), prout nempe factores vel aequalia vel inaequalia signa habent. 3.) Cum factores pluribus constant terminis, quivis terminus, per quemlibet terminum multiplicandus est, et tum producta partialia addantur.

Exempla,

1.) $3a\times4b=12ab$. Nam $3a\times4b=3\times a\times4\times b$ $=3\times4\times ab=12.ab=12ab$.

2.) $4a\times(-4b)=-16ab$. Nam $4a\times(-4b)=$ $4\times-4\times a\times b=(-16)\times ab=-16ab$.

3.) $(a-b)(a+b)=aa-ab+ab-bb=aa-bb$.

Nam

$$\begin{array}{l} a-b \\ a+b \\ \hline aa-ab \\ \quad +ab-bb \\ \hline aa-bb = \text{producto.} \end{array}$$

4.) $(a+b)(a+b)=aa+ab+ab+bb$. Vel ita:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab \\ \quad +ab+bb \\ \hline aa+2ab+bb. = \text{producto ex } (a+b) \text{ in } (a+b). \end{array}$$

5.) $(a+b+c)(a-b-c)=aa+ab+ac-ab-bb-bc-ac-bc-cc=aa-bb-2bc-cc$. Vel ita:

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ a-b-c \\ \hline aa+ab+ac \\ \quad -ab-bb-bc \\ \quad\quad -ac-bc-cc. \\ \hline aa-bb-2bc-cc = \text{prod.} \end{array}$$

6.) $(3+4+5)(3+2-4)=9+12+15+6+8+10-12-16-20=60-48=12$. Vel ita:

$$\begin{array}{lcl} 3+4+5 & = = = & 12 \\ 3+2-4 & = & 1. \\ \hline 9+12+15 & & 12. \\ \quad 6+8+10 & & \\ \quad -12-16-20 & & \\ \hline 9+18+23-12-6-20=12. & & \end{array}$$

§. 26. *Dividere* nihil aliud est, ac determinare, quoties quantitas quaepiam ab alia sub-

tracta sit, vel investigare, quoties quantitas una in altera contineatur. Quantitas contenta dicitur *divisor*, illa quae hanc continet dicitur *dividendus*, illa, quae indicat, quoties prima in altera contenta sit, vocatur *quotus* vel *quotiens*.

Si $2a$ essent dividenda per a; toties a ab $2a$ subtrahenda erunt, quoties id fieri potest. Ergo $2a - a = a$ | semel | ; $a - a = a$ | bis | . Igitur a in $2a$, bis continetur, vel $2a : a = 2$. Ita etiam $3a$ in $6a$ bis contentum, vel ($3a$) ab $6a$, bis subtrahi possunt.

§. 27. Quemadmodum ergo multiplicatio repetita est additio, ita etiam divisio iterata subtractio est. Ac divisionis *occupatio* nulla alia est, quam separare ea, quae multiplicatione exorta (producta) sunt. Nimirum divisio rursum *dissolvit* productum in suos factores, ex quibus per multiplicationem effectum erat, semperque unus factor datur, in divisore; quaeritur itaque alter factor vel quotus; qui factores (divisor et quotus) rursum in se ducti, iterum productum vel dividendum dare debent.

§. 28. Sit itaque ab per b dividendum; est ab productum, et b unus factor, alter quaerendus. Cum autem ab, ut productum, tantum ex factoribus b et a produci posset, et b unus factorum (ut divisor) detur; alter quaesitus factor nullus potest esse alius, quam a. Dico itaque $ab : b = a$. Nam tantum a in b ductum dat ab pro facto. Item $7a$ continentur in $42a$ sexies, vel $42a : 7a = 6$, quia $6 \times 7a \times 42a$.

§. 29. *Coroll.* Signa *aequalia* in divisore et dividendo dant in quoto (+), *positivum*, et inaequalia dant (−), *negativum* quotum. Hoc

exultat ex definitione. Est enim divisio dissolutio producti in suos factores; quo modo ergo multiplicatio factores in productum conjungit, eo quoque modo illos divisio separare debet. Atqui solum aequalia signa factorum dant (+) in producto, et inaequalia (—); si ergo unus factor vel divisor fuerit signo eodem, quo dividendus vel productum affectus: quotus habebit signum positivum (+), et cum signa divisoris et dividendi sunt inaequalia, quotus fiat negativus oportet, ut multiplicatio desiderat. Hinc erit:

1) $+2a:(+a)=+2$; nam $+a\times(+2)=+2a$.

2) $-2a:(-a)=+2$; nam $-a\times(+2)=-2a$.

3) $+2a:(-a)=-2$; nam $-a\times(-2)=+2a$.

4) $-2a:(+a)=-2$; nam $+a\times(-2)=-2a$.

§. 50. *Axioma.* Dimidia partium aequantur dimidio totius. Vel: Quaelibet aliquota pars totius (summae) aequalis est aliquotis summandorum partibus (§. 34. Arithm. Elem. §. 6. gener. Addit.).

Invenitur itaque, quoties divisor in dividendo sit contentus; si sciatur: quoties ille in quovis summando (in quavis ejus parte) contineatur.

Si ergo dividendus (productum) *pluribus* constat *terminis* (partibus), et divisor (factor datus) ex *uno* duntaxat; divisio toties repetenda est, quoties nempe multiplicatum erat. Id est: quivis terminus dividendi per divisorem dividi debet.

Sint ($8a-2d+6c$) dividenda per 2; hic ter erit dividendum. Nam imprimis 2 in 8a continetur

4a vicibus; vel $8a : 2 = 4a$; deinde $(-2d) : 2 = -d$; et denique $+6c : 2 = +3c$. Id accomodatius sic locatur;

$$
\begin{array}{l}
(8a - 2d + 6c) : 2 = 4a - d + 3c. \\
-8a \\
\hline
-2d : 2 = -d \\
-2d \\
+ \\
\hline
+6c : 2 = +3c. \\
+6c \\
- \\
\hline
0.
\end{array}
$$

§. 31. Quodsi et dividendus (quantitas sit polynomia) et divisor *pluribus* constet *terminis*; sequentes *regulae* veniunt *observandae*:

1) Inhoetur divisio uno cum termino divisoris duntaxat, quaerendo quoties ille in uno termino dividendi contineatur; inventum (toties) in loco quoti scribatur. 2) Per hunc inventum quotum multiplicetur totus divisor, detectumque productum subtrahatur a dividendo, residuum adscribatur de novo; 3) hoc modo divisio continuetur, donec vel omnes termini se tollant, vel ad quantitates heterogeneas deveniatur; 4) hae, si occurrant, scribantur in loco quoti cum subscripto divisore. 5) Signa in divisore et dividendo aequalia dant in quoto plus = (+), signa eorum inaequalia autem dant in quoto minus = (—).

Lubeat has regulas in *Exemplis*, id est, in concreto intueri.

1) Sint $(6aa - 13ab - 28bb)$ dividenda per $(3a + 4b)$. Erit Operatio sic instituenda:

$$
\begin{array}{l}
(6aa - 13ab - 28bb) : (3a + 4b) = 2a - 7b. \\
+6aa + 8ab \\
- \quad - \\
\hline
\quad -21ab - 28bb : (3a + 4b) \\
\quad -21ab - 28bb \\
\quad + \quad + \\
\hline
\quad 0,
\end{array}
$$

Infer, $3a$ in $6aa$ continentur $2a$ vicibus, vel potius sic: $6aa$ divisa per $3a$ dant pro quoto $2a$; nam $2a \times 3a = 6aa$; et $2a \times 4b = 8bb$. Haec $(6aa + 8bb)$ subtrahe a dividendo, residuumque $= (-21ab - 28bb)$ adscribas. Tum ulterius divide, dicendo $-21ab$ divisa per $3a$ dant pro quoto $(-7b)$; his inventis per $-7b$ multiplica totum divisorem, productumque inventum a residuo auferas, et ita porro procede.

Exhibitio. Possunt $(6aa - 13ab - 28bb)$ sic scribi: $= 6aa + 8ab - 21ab - 28bb$; et hoc in factores reductum dat $= (3a + 4b)\,2a - (3a + 4b)\,7b$. Id vero est $= (3a + 4b)\,2a + (3a + 4b) \times (-7b)$, seu $= (3a + 4b)(2a - 7b)$. Ergo unus factor $(3a + 4b)$, et alter $= (2a - 7b)$. At

$$(3a + 4b)(2a - 7b) : (3a + 4b) = \frac{(3a + 4b)(2a - 7b)}{(3a + 4b)}$$

$$= 2a - 7b;\ \text{ergo}\ \frac{6aa - 13ab - 28bb}{3a + 4b} = 2a - 7b.$$

Igitur quotus rite per has regulas invenitur.

2) $(aa + 2ab + bb) : (a + b) = a + b$

$$\begin{array}{l} aa + ab \\ - \quad - \\ \hline \quad + ab + bb \\ \quad\;\; ab + bb \\ \quad\;\; - \quad - \\ \hline \quad\quad 0. \end{array}$$

Exhibitio. Est enim $aa + 2ab + bb = aa + ab + ab + bb = (a + b)a + (a + b)b = (a+b)(a + b)$. Si itaque, unus factor fit $(a + b)$; erit alter $= (a + b)$. Id quod servata regula invenitur.

3) $(aa - bb) : (a + b) = a - b$

$$\begin{array}{l} aa + ab \\ - \quad - \\ \hline -ab - bb \\ -ab - bb \\ + \quad + \\ \hline \quad 0. \end{array}$$

Exhibitio. Est enim $aa - bb = aa + ab - ab - bb$,
seu $aa - bb = (a + b)a - (a + b) \times (-b)$,
et $aa - bb = (a + b)(a - b)$.
Ergo unus factor $= a + b$; alter $= a - b =$ quoto invento.

4) $(2a + b) : a = 2 + \frac{b}{a} =$ quoto, ita legendo: 2, plus b divisum per a.

$$\begin{array}{l} 2a \\ - \\ \hline +b \end{array}$$

5) $(4ab - 3a) : 4a = b - \frac{3a}{4a}$,

$$\begin{array}{l} 4ab \\ - \\ \hline \quad -3a \end{array}$$

Examen rite factae multiplicationis eſt diviſio producti per unum factorum; et examen rite factae diviſionis eſt multiplicatio quoti cum diviſore. Una igitur alteram examinat. Ita pro 3tio Exemplo erit:

$a + b$ (diviſor)

$a - b$ (quotus inventus).

Productum $= aa + ab - ab - bb = aa - bb =$ dividendo.

§. 32. *Coroll.* 1. Quemadmodum ſolae homogeneae magnitudines ab invicem ſubtrahi poſſunt, ita etiam ſolae homogeneae magnitudines dividi, vel diſſolvi poſſunt, dum invenitur, quoties una in altera compreheпſa ſit.

Si *a* per *b* ſit dividendum, vel inveſtigandum, quoties *b* in *a* contineatur; id determinate dari non poteſt, ſed id ſolum indicatur, hoc modo: *a* diviſum per $b = \frac{a}{b}$. Cumprimum ſciatur numerus unitatum in (*a*), et in *b*; tunc diviſio perfici poterit. Igitur inter quantitates heterogeneas *diviſio indicata* jam quotum dat. Ut, $abc : d = \frac{abc}{d}$; $efg : x = \frac{efg}{x}$.

§. 33. *Coroll.* 2. Quaevis quantitas in ſe ipſa ſemel eſt contenta; vel $a : a = 1$; et $x : x = 1$. Eſt enim $a \times 1 = a$; et $x \times 1 = x$.

Coroll. 3. Quantitas, vel ejus expressio (terminus) immutata manet; si per aliam quamcunque multiplicatur et simul dividitur. Nam $a \times b = ab$, et $ab : b = a$. Vel $\frac{ab}{b} = a$; seu $\frac{a \times b}{b} = a$.

Coroll. 4. Si itaque in dividendo et simul in divisore eadem litera (ut factor) occurrat; id idem est, ac si non adesset, ergo potest deleri. Hac ex ratione *profertur*: in divisione aequales literae in dividendo et divisore tollunt se, et reliquae duntaxat in loco quoti scribuntur; igitur soli coefficientes dividendum veniunt. Ut $abc : ab = c$, vel $\frac{abc}{ab} = \frac{ab}{ab} \times c$. Et $6\,abc : 2abc = 3$, vel $\frac{6abc}{2abc} = \frac{6}{2} \times \frac{abc}{abc} = \frac{6}{2} = 3$. Et $\frac{14ax}{7a} = \frac{14}{7} \times \frac{a}{a} \times x = 2 \times 1 \times x = 2\,x$.

Schol. Divisionis prospectus admodum adjuvatur; si dividendus in factores suos resolvatur; ubi mox apparet, qui factorum divisori sint aequales, ergo deleri possint. Ut:

$$\frac{24\,ab}{8} = \frac{3 \times 8 \times ab}{8} = \frac{8 \times 3ab}{8} = 3ab.$$

$$\frac{30\,acd}{5\,ad} = \frac{5 \times 6 \times acd}{5ad} = \frac{5ad \times 6c}{5ad} = 6c.$$

$$\frac{30\,acd}{10\,ac} = \frac{3 \times 10acd}{10ac} = \frac{10ac \times 3d}{10ac} = 3d.$$

$$\frac{30\,abc}{8c} = \frac{6\times5abc}{8c} = \frac{5.3\times2abc}{8c} = \frac{2c\times3\times5ab}{2c\times4}$$

$$= \frac{3\times5ab}{4} = \frac{15ab}{4}.$$

§. 34. In doctrina de divisione, etiam doctrina de investigandis factoribus, ex quibus productum constare potest, pertractanda venit.

In expressione algebraica producti, unius termini, quaevis litera est factor. Ut, producti (abcd), inveniuntur factores hi: a, b, c, d, singuli simplices, vel $abcd = a\times b\times c\times d$. Tum bini et bini, terni et terni. Hoc modo procedunt factores ad 5., 6, 7, 8 etc. literas, prout productum compositum fuerit.

Quodsi productum pluribus constet terminis, vel si ex factoribus fuerit ortum, qui plures terminos continent; sola diligenti et attenta exercitatione (repetitione) opus erit, ut tales factores invenire ediscamus. Generatim autem vel unus factor jam datur, vel pro ratione eligitur, et tunc alter quaeritur per divisionem. In quovis exemplo oblato, praesertim in aequationibus, ubi incognitae quantitates quaerendae dantur, jam optime colligitur, quinam factores datum productum efficiant, dum plerumque quantitas incognita pro uno factore assumi potest.

Unde facile colligetur, sequentia producta in suos factores ita resolvi posse:

$xx + 2bx + bb = (x+b)(x+b).$

$xx - 2bx + bb = (x+b)(x-b).$

$xx - bb = (x+b)(x-b).$

$xx - 2x + 1 = (x-1)(x-1).$

$aa - 1 = (a+1)(a-1)$.
$aa - bb + 2bc - cc = (a+b-c)(a-b+c)$.
$5x - 2bx = (5-2b)x$.
$ax - x = (a-1)x$,
$9x - 7ax - bx = (9-7a-b)x$.
$9x - 7ax + 2a - 8ab = (9-7a)x + (2-8b)a$;

et ita porro. (Confer doctrinam de aequationibus et combinationibus).

Schol, Sequentia Theoremata concernunt conjunctionem factorum cum suo producto.

§. 35. *Theorema*. Productum jam per quamcunque algebraicam magnitudinem multiplicatur; si alteruter factor per illam multiplicetur.

Demonstratio. Nam, si *a* et *b* factores sunt; erit $a \times b = ab =$ Producto. Jam si *a* vel *b* per quamcunque algebraicam magnitudinem $= x$ multiplicatur; erit $ax \times b = abx$; et $bx \times a = bax = abx$. Atqui $ab \times x = abx$. Ergo etc. Hinc $(6 \times 3) \times 4 = 24 \times 3 = 6 \times 12$,

§. 36. *Theorema*. Productum per quamcunque magnitudinem algebraicum dividitur; si unus suorum factorum per illam dividatur.

Demonstratio. Nam factores *ab* et *c* dant, $ab \times c = abc$ productum. Hoc productum per quamcunque magnitudinem $= b$, divisum dat, $abc : b = ac$. Verum, si unus factor v. g. *ab* per hanc dividatur. et alter *c* constans maneat, erit $\frac{ab}{b} = a$, et $a \times c = ac$. Ergo idem quotus resultat,

Hinc $(20 \times 8) : 4 = 5 \times 8 = 20 \times 2$; vel

$$\frac{20\times 8}{4} = \frac{20}{4}\times 8 = 20\times\frac{8}{4}.$$ Et

$$\frac{30ab\times 5a}{5a} = 6b\times 5a = 30ab\times 1 = 30ab.$$

§. 37. *Theorema.* Productum non mutatur, si unus suorum factorum per quamcunque magnitudinem algebraicum (id est numerum) multiplicatur, alterque per illam dividitur.

Demonstratio. Sint enim *a c* et *b* factores; erit $ac\times b = abc =$ producto. Si jam unus factorum *b* per *c* multiplicatur; est $b\times c = ac$; et cum alter factor *ac* per hanc rursus dividitur, erit $ac : c = a$, ergo $bc\times a = abc =$ eidem producto.

Hinc $20\times 8 = 5\times 32 = 40\times 4$; vel $\frac{20}{4}\times 8\times 4 = 20\times 2\times\frac{8}{2}$.

§. 38. *Theorema.* Quotus per quamlibet magnitudinem algebraicam (id est per quemlibet numerum) multiplicatur; si per eandem dividendus multiplicetur; vel divisor dividatur.

Demonstratio. Sint enim *abc* dividendus, et *bc* divisor; erit $abc : bc = a$, et $a\times c = ac$. Si jam *abc* per *c* multiplicatur, et *bc* constans manet; erit $abc\times c = abcc$, et $abcc : bc = ac = a\times c$. Vel cum *bc* per *c* divitur, et dividendus constans est; erit $abc : \frac{bc}{c} = abc : b = ac = a\times c$.

Hinc $\left(\frac{abc}{c}\right)\times a = \frac{aabc}{c} = abc : \frac{c}{a}$. Et

$$\tfrac{32}{8} \times 2 = \frac{32 \times 2}{8} = \frac{32}{8:2} = \tfrac{32}{4} = 8.$$ Et

$$\tfrac{3}{8} \times 2 = \tfrac{6}{8} = \frac{3}{8:2} = \tfrac{3}{4}.$$ Et ergo

$$\tfrac{3}{8} \times a = \frac{3a}{8} = \frac{3}{8:a} = 3 : \frac{8}{a}.$$

§. 39. *Theorema.* Quotus per quamlibet magnitudinem algebraicam dividitur; si per ipsam dividendus dividatur, vel divisor multiplicetur.

Demonstratio. Sit *abc* dividendus, et *b* divisor; erit $abc : b = ac$ = quoto. Hic quotus divisus dat $ac : c = a$. Si autem *abc* per *c* dividitur, et *b* remanet constans; fit $\frac{abc}{c} : b = ab : b = a$.

Vel, multiplicetur *b* per *c*, et *abc* maneat constans; erit $\frac{abc}{b \times c} = abc : bc = a$.

§. 40. *Theorema.* Quotus minime mutatur; si tum divisor cum dividendus per eundem numerum (eandem magnitudinem algebraicam) multiplicentur, aut dividantur.

Demonstratio. Sit dividendus $= abc$, et divisor $= bc$; erit $abc : bc = a$. Si jam productum dividendum *abc*, et simul divisor *bc* per *c* multiplicantur; erit $abc \times c = abcc$, et $bc \times c = bcc$. Hinc $abcc : bcc = a$, ut paullo ante.

Vel, si dividendus *abc* et simul divisor *bc* per *c* dividuntur; erit $abc : c = ab$, et $bc : c = b$;

igitur et $\frac{abc}{c} : \frac{bc}{c} = ab : b = a.$ Quod tantundem est, ac, (abc : bc) = a.

Coroll. Unitas non dividit. Est enim

$$\frac{a}{1} = \frac{1a}{1} = a.$$

Caput III.

De Fractionibus.

§. 41. Insinuata divisio, quippe magnitudinum heterogenearum, vel earum, ubi divisor in dividendo amplius (integer) non continetur, et quae hoc modo scribitur, $\frac{b}{a}$, id est b : a = *b* diviso per *a*, dicitur arithmetice *fractio*. Divisor nuncupatur hic *denominator*, et dividendus *numerator* fractionis. In fractione proprie sic dicta, vel *vera* semper b < a, vel numerator semper minor esse debet denominatore. Fractio *radicalis* est, cujus numerator = 1. Fractio dicitur *impropria* vel *spuria*, cujus numerator major est denominatore, vel eidem aequalis. Fractio dicitur *simplex*, quae unum numeratorem et denominatorem habet; *composita* est fractio fractionis, v. g. $\frac{3}{4:5}$; vel $\frac{3}{4}$: 5. Fractio *mixta* est, dum praeter fractionem integer numerus adest, ut $8\frac{3}{7}$. *Purae* fractiones sunt, si illis integra non adhaereant. *Aequales*, quae eundem habent valorem; *inaequales*, quae diversi sunt valoris. Quae eundem habent denominatorem: *similes*

(homogeneae), quae diversunt: *dissimiles* (heterogeneae) vocantur.

§. 42. *Theorema.* Si fractio per suum denominatorem multiplicetur; obtinetur numerator. Id est: $\frac{b}{a} \times a = b$.

Demonstr. Est enim $\frac{b}{a} = b : a$, ergo

$\frac{b}{a} \times a = (b : a) \times a = b$. (§. 34. Arith. Elem. Cor. 1. et 4.), quia dividendus obtinetur, si quotus in divisorem ducatur. Unde $\frac{3}{4} \times 4 = \frac{12}{4} = 3$.

§. 43. *Theorema.* Fractio quaepiam per quamvis magnitudinem (algebraicam, vel numerum) multiplicatur, per quam ejus numerator multiplicatur, vel ejus denominator dividitur.

Demonstratio. Est enim $\frac{a}{bc} = a : bc$. Sed $(a : bc)$

$c = a \times c : bc$, vel $= a : \frac{bc}{c}$ (§. 35. Algeb. vel §. 35. Arith. Elem. Cor. 2.). Ergo $\left(\frac{a}{bc}\right) \times c = \frac{ac}{bc}$

$= a : \frac{bc}{c}$.

Hinc erit $\frac{3}{4} \times 2 = \frac{3+2}{4} = \frac{3}{4:2} = \frac{3}{2}$.

$\frac{8}{12} \times 3 = \frac{8 \times 3}{12} = \frac{8}{12:3} = \frac{8}{4}$.

$$\frac{a}{bf} \times f = \frac{af}{bf} = \frac{a}{bf:f} = \frac{a}{b}.$$

Coroll. Integer numerus per fractionem multiplicatur; si ducatur in numeratorem fractionis. Id est $d \times \frac{a}{b} = \frac{ad}{b}$. Nam $d \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times d$ (aequales factores dant aequale productum) $= \frac{ad}{b}$. Hinc etiam $3 \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8}$.

§. 44. *Theorema.* Fractio quaevis per quemlibet numerum dividitur; si per hunc numerator dividatur, vel denominator multiplicetur.

Demonstr. Hoc est $\frac{ab}{cd} : b = \frac{ab}{cd \times b} = \frac{a}{cd}$.

Nam $\frac{ab}{cd} = ab : cd$. At $(ab:cd) : b = \frac{ab}{b} : cd$ (§. 39. vel §. 35, Arith. Elem. Cor.) $= a : cd = \frac{a}{cd}$

Vel $(ab : cd) : b = ab : cd \times b$ (§. 39. Algeb.) $= \frac{ab}{cdb} = \frac{a}{cd}$.

Ergo etiam est $\frac{ab}{cd} : b = \frac{ab}{cdb} = \frac{a}{cd}$; vel $\frac{ab}{cd} : b = \frac{ab}{b} : cd = \frac{a}{cd}$. Unde erit

$\frac{6}{7} : 3 = \frac{6:3}{7} = \frac{2}{7}$; vel $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6}{7 \times 3} = \frac{6}{21}$.

$$\frac{1}{2} : 5 = \frac{1:5}{2} = \frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{10}.$$

Coroll. Numerus integer dividitur per quampiam fractionem; ſi ducatur in denominatorem et dividatur per numeratorem fractionis. Id eſt $d : \frac{a}{b} = \frac{db}{a}$. Nam $d : \frac{a}{b} = \left(d \times b : \frac{ab}{b}\right)$ (§. 43. Cor. et §. 35. Cor. 4. Arith. Elem.) $= db : a = \frac{db}{a}$.

§. 45. *Theorema.* Fractio non mutatur; ſi tam numerator quam denominator per quantitatem eandem multiplicentur. vel dividantur. Id eſt: $\frac{a}{b} = \frac{a \times a}{b \times a}$. Et $\frac{ab}{ad} = \frac{ab : a}{ad : a} = \frac{b}{d}$.

Demonſtr. Eſt enim $\frac{a \times a}{b \times a} = aa:ab = (a \times a):b \times a)$ Atqui quotus non mutatur, ſi dividendus ſimul ac diviſor per eandem magnitudinem multiplicentur (§. 40.), ergo $aa : ba = a : b$. Ergo etiam $\frac{a \times a}{b \times a} = \frac{a}{b}$. Ad ſecundum, eſt; $\frac{ab}{ad} = ab:ad$. Sed $ab : ad = \frac{ab}{a} : \frac{ad}{a}$ (§. 40; et §. 35. Cor. 4. Arith. Elem.) $= b : d = \frac{b}{d}$. Ergo etiam $\frac{ab}{ad} = \frac{b}{d}$

Unde erit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32}$.
Et $\frac{130}{200} = \frac{13}{20} = \frac{1}{2}$.

Scholion. Cum itaque fractio nullatenus mutetur,

quando et numerator et denominator per eundem numerum dividantur; in eo nititur fundamentum methodi reducendi fractiones numericas ad minimos terminos (den Bruch aufheben), et exprimendi fractiones algebraicas in terminis minimis.

§. 46. *Problema*, Convertere fractionem datam $\frac{b}{a}$ in aliam $\frac{bc}{ac}$, ita tamen, ut fractio nova habeat datum denominatorem *ac*, dummodo iste denominator sit multiplum numeratoris fractionis datae.

Resolutio. Dividatur datus denominator *ac* per denominatorem fractionis *c*, et per inventum quotum ex hac divisione multiplicetur numerator et denominator fractionis, productum enascens dabit fractionem novam.

Demonstr. Fractio $\frac{b}{a}$ rite mutatur in hanc: $\frac{bc}{ac}$.

Nam $\frac{b}{a} \times \frac{c}{c} = \frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$ (§. 40.).

Coroll. Unde fractionem $\frac{3}{4}$ mutare licet in aliam, cujus denominator $=$ 8, 12, 16, 20 vel qualecunque multiplum denominatoris 4 sit. Nam

quia,	$8:4=2$	igitur erit	$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$
	$12:4=3$		$\frac{5}{4}=\frac{9}{12}$
	$16:4=4$		$\frac{3}{3}=\frac{12}{16}$
	$20;4=5$		$\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$
	$48:4=12$;		$\frac{3}{4}=\frac{36}{48}$; etc.

§. 47. *Problema.* Reducere fractiones diversi denominatoris, ad communem denominatorem (fractiones ejusdem denominationis).

Resolutio. Numerator cujusvis fractionis ducatur in omnes denominatores proprio excepto; productum hoc erit novus numerator fractionis ejus, cujus numerator multiplicatur. Deinde multiplicentur omnes denominatores simul inter se, factum denominatorum erit denominator communis. Ita $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, dant $\frac{ad + bc}{bd}$. Et

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \text{ dant, } \frac{adf}{bdf} + \frac{cbf}{bdf} + \frac{ebd}{bdf}.$$

Demonstr. Fractionis valor non mutatur, si tam numerator, quam denominator ejusdem per eandem quantitatem (literam vel numerum) multiplicentur: sed per praedictas regulas denominator et numerator cujusvis fractionis per eandem quantitatem multiplicantur, nempe omnes per denominatores reliquarum; igitur valor earum non mutatur. Et cum iidem factores idem dant factum; etiam denominator cujusvis fractionis per denominatores reliquarum multiplicatus idem factum dat, ergo aequalem vel eundem denominatorem.

Hoc est, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad + bc}{db}$

$= \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}$. In fractione $\frac{a}{b}$ tam numerator quam denominator per *d* multiplicatur; in fractione $\frac{c}{d}$, et numerator et denominator ducitur in *b*; ergo ambae immutatae manent, et simul

eundem denominatorem obtinent. Dein, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a\times df}{b\times df}+\frac{c\times bf}{d\times bf}+\frac{e\times bd}{f\times bd}=\frac{adf+bcf=ebd}{bdf}$, Fractionis primae numerator et denominator multiplicantur per df, secundae per bf, tertiae per bd; ergo per aequalia. Quare fractiones ipsae non mutantur. Unde erit:

$$\frac{2}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{6}=\frac{180+120+72+120}{360.};$$ sunt enim aeq. $=\left(\frac{2\times3\times5\times6}{4.\ 3.\ 5.\ 6.}\right)+\left(\frac{1\times4\times5\times6}{3.\ 4.\ 5.\ 6.}\right)+\left(\frac{1\times4.3.6}{5.\ 4.3.6}\right)+\left(\frac{2\times4\times3\times5}{6.\ 4\times3.\ 5}\right)=\frac{180}{360}+\frac{120}{360}+\frac{72}{360}+\frac{120}{360}$.

§. 48. *Coroll.* 1. Loco unitatis $=1$, potest fractio poni, cujus numerator et denominator aequales vel iidem sunt, Est enim $\frac{a}{a}=1$; et $\frac{aa}{aa}=1$.

§. 49. *Coroll.* 2. In locum cujusvis numeri (quanti) a potest fractio poni $=\frac{ad}{d}$, cujus denominator numerus quivis $=d$, et cujus numerator $=ad$, factum ex hoc ipso denominatore in

illum numerum integrum est. Id est $a = \frac{ad}{d}$, Est enim $\frac{ad}{d} = ad : d = \frac{ad : d}{d : d} = a : 1 = a$.

§. 50. *Problema.* Integros numeros et fractiones (numerum mixtum) reducere ad communem denominatorem, seu fractionem puram.

Resolutio. Multiplicetur integer per denominatorem fractionis et dividatur simul per illum (instar fractionis); dein addatur huic fractio.

Demonstr. Sint $a + \frac{c}{d}$, reducenda. Erit

$a + \frac{c}{d} = \frac{ad}{d} + \frac{c}{d} = \frac{ad + c}{d}$. Numerus integer non mntatur, si per eandem quantitatem multiplicetur et simul dividatur. Si ergo per denominatorem fractionis multiplicatur et dividitur; simul obtinetur idem denominator integro non mutato. Hinc $a + \frac{2d + 1}{c} = \frac{ac + 2d + 1}{c}$.

Et $2a + \frac{a + 2}{b} = \frac{2ab + a + 2}{b}$.

$3 + \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{8} + \frac{7}{8} = \frac{24}{8} + \frac{7}{8} = \frac{24 + 7}{8}$.

$9\frac{3}{4} \frac{36 + 3}{4}$.

§. 51. Quaevis fractio est *una* vel *plures*

aequales *partes* totius. Est enim $\frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{1 . b} = \frac{1}{b} \times a$,

§. 52. *Theorema.* Fractio quaelibet multiplicatur per aliam fractionem; si numerator unius in numeratorem alterius, et denominator unius in denominatorem alterius ducatur; vel si productum numeratorum per factum denominatorum dividatur.

Demonstr. Sint $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ factores; erit

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}.$$

Nam cum productum non mutetur, si unus factor per quamcunque magnitudinem multiplicetur, alterque per illam dividatur (§. 37.); erit:

$$\left(\frac{a}{b} \times b\right) \times \frac{c}{d} : b = \frac{a\,b}{b} \times \frac{c}{bd}$$ (§. 43. et §. 44.).

seu $= a \times \frac{c}{bd} = \frac{ac}{bd}$ (§. 43. Coroll.);

vel $\left(\frac{a}{b} : d\right) \times \left(\frac{c}{d} \times d\right) = \frac{a}{bd} \times \frac{cd}{d}$ (§. 44. et §. 43.), seu $= \frac{a}{bd} \times c = \frac{ac}{bd}$ (§. 43.).

Ergo $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = (\frac{3}{4} \times 5) : 7 = \frac{3 \times 5}{4} : 7 = \frac{3 \times 5}{4 \times 7}$.

Aliter.

Sit factor $\frac{a}{b}=n$; et alter factor $\frac{c}{d}=m$.

Erit $a=bn$ (§. 42.), et $c=dm$.

Si autem aequalia per aequalia multiplicentur, facta sunt aequalia. Ergo

$a=bn$
$c=dm$, dabunt

$ac=bdmn=nm.\ bd$. Et si aequalia per aequalia dividuntur, facta quoque sunt aequalia; ergo

$\frac{ac}{bd}=\frac{nm.\ bd}{bd}=nm$. Sed $n=\frac{a}{b}$, et $m=\frac{c}{d}$,

et *nm* est productum quotorum; hinc etiam

$\frac{ac}{bd}=nm=$ (aequale) producto fractionum.

Unde $\frac{3}{4}\times\frac{7}{8}=\frac{3\times7}{4\cdot8}=\frac{21}{32}$. Et $\frac{3}{1}\times\frac{8}{9}=\frac{3\times8}{9}=\frac{24}{9}$

53. *Theorema.* Numeri *a*, vel numeri fracti $\frac{a}{n}$ *pars* sic dicta *xtesima m* vicibus sumpta obtinetur; si numerus *a*, vel $\frac{a}{n}$ in $\frac{m}{x}$ ducatur.

Demonstr. Pars xtesima numeri $a=\frac{1}{x}\times a=\frac{a}{x}=a:x$. Et xtesima pars numeri $\frac{a}{n}=\frac{1}{x}$

$\times \frac{a}{n} = \frac{a}{nx}$. Erit ergo pars xteſima numeri *a*, (m) vicibus ſumpta $= \frac{a}{x} \times m = \frac{am}{x} = a \times \frac{m}{x}$. Et pars xteſima numeri $\frac{a}{n}$, (m) vicibus ſumpta $= \frac{a}{nx} \times m = \frac{am}{nx} = \frac{a}{n} \times \frac{m}{x}$.

§. 54. *Theorema.* Quaevis integra quantitas dividitur per fractionem; ſi per inverſam fractionem multiplicetur, hoc eſt, *a*: $\frac{c}{d} = a \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{c}$.

Demonſtr. Nam $\left(a : \frac{c}{d}\right)$ non mutatur, ſi diviſor et dividendns per eandem quantitatem multiplicantur (§. 35. Cor. 4. Arith. Elem.) erit ergo $a : \frac{c}{d} = ad : \frac{cd}{d}$ (§. 43.) $= ad : c = \frac{ad}{c} = a \times \frac{d}{c}$. Vel $a : \frac{c}{d} = \frac{a}{c : d}$; et hoc $= \frac{a \times d}{(c:d) \times d} = \frac{ad}{c} = a \times \frac{d}{c}$.

Aliter.

Sit $a : \frac{c}{d} = q$. Erit $a = q \times \frac{c}{d}$ (§. 54. Cor. 1.

Elem.) ſeu $a = \frac{qc}{d}$; et $ad = \frac{qcd}{d}$ (§. 28. Cor. 1. Arithm. Elem.) ſeu $ad = qc$; et $\frac{ad}{c} = \frac{qc}{c}$ (§. 34. Cor. 6. partis I.) $= \frac{ad}{c} = q$. Ergo $a : \frac{c}{d} = \frac{ad}{c} = a \times \frac{d}{c}$. Quare erit $3 : \frac{5}{8} = 3 \times \frac{8}{5} = \frac{24}{5}$. Et $7 : \frac{1}{2} = 7 \times \frac{2}{1} = 14$.

Coroll. Quaevis fractio dividitur per quemlibet numerum integrum; ſi ejus denominator in numerum integrum ducatur, et hoc productum per numeratorem fractionis dividatur. Id eſt $\frac{a}{b} : d = \frac{a}{bd}$. Nam $\frac{a}{b} : d = q$; et $\frac{a}{b} = dq$; et $\frac{a}{b} \times b \times dbq$, ſeu $a = db.q$. Et $\frac{a}{db} = \frac{dbq}{db}$; ſeu $\frac{a}{db} = q$. Ergo $\frac{a}{db} = \frac{a}{b} : d$ (§. 44.).

§. 55. *Theorema.* Quaevis fractio dividitur per aliam fractionem; ſi diviſor invertatur, et tum numerator in numeratorem et denominator in denominatorem ducatur, vel ſi, ut ajunt, per transverſum multiplicetur.

Demonſtratio. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Nam $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{b} : \frac{cd}{d}$ (dividendum et diviſorem

per eandem quantitatem d multiplicando), hoc est $= \frac{ad}{b} : c = \frac{ad}{b \times c} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ (§. 44.)

Vel $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b \times \frac{c}{d}}$ (quia quaevis fractio ut $\frac{a}{b}$ per quemvis numerum, ut $\frac{c}{d}$ dividitur, si ejus denominator per hanc multiplicetur §. 44.) $=$

$\frac{a}{\frac{bc}{d}} = \frac{ad}{\frac{bc \times d}{d}}$ (§. 45.) $= \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

Aliter.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} =$ quoto $= q$. Ergo.

$\frac{a}{b} = q \times \frac{c}{d}$ (§. 34. Cor. 1. Elem.); hoc autem est,

$\frac{a}{b} = \frac{qc}{d}$; adeoque aequalia per aequalia multiplicando,

$\frac{ad}{b} = \frac{qc \times d}{d} = qc$. Et per idem dividendo,

$\frac{ad}{b} : c = \frac{qc}{c}$, id est (§. 44.)

$\frac{ad}{bc} = q$. Ergo erit $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Schol. In numeris posset propositio ita probari. $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{20}$. Nam reducendo fractiones ad eandem denominationem erit:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{21}{28} : \frac{20}{28} = \frac{21 \times 28}{28} : \frac{20 \times 28}{28} = 21 : 20 =$$

$\frac{21}{20}$. Et in literis $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd}$; et

$$\frac{ad \times bd}{bd} : \frac{bc \times bd}{bd} = ad : bc = \frac{ad}{bc}.$$

§. 56. *Theorema.* Fractiones spuriae reducuntur ad integros numeros; si numeratores per denominatores actu dividantur.

Demonstr. Est enim $\frac{abc}{c} = ab$. Et $\frac{ab + c}{a} =$

$b + \frac{c}{a}$. (per defin.). Unde $\frac{24}{8} = 3$. Et $\frac{26}{8} =$

$3 + \frac{2}{8} = 3\frac{2}{8}$.

§. 57. Fractio dicitur in *minimis numeris* (terminis) *expressa*, vel prorsus *resoluta*, si nulli sit aequalis, cujus numerator et denominator minores numeri (simpliciores termini) sunt.

Coroll. Ergo fractio, cujus numerator et denominator numeri primi inter se sunt, jam prorsus resoluta est, et si fractio prorsus resoluta sit; numerator et denominator sunt primi inter se. Nam fractiones nihil aliud sunt, quam quoti numerorum integrorum (§. 21.), ergo ambae propositiones verae sunt.

§. 58. *Problema.* Fractionem *resolvere*, seu ad minimos terminos reducere.

Resolutio. Quaeratur communis mensura maxima numeratoris et denominatoris (§. 39. Elem.), et dividatur per illam tum numerator tum denominator (§. 37.); erit fractio nova petita. V. g. Si $\frac{42}{56}$ sit resolvenda, et numerator ac denominator per 14 dividatur; erit $\frac{3}{4}$ fractio resoluta. Et $\frac{3ab}{6a} = \frac{3ab:3a}{6a:3a} = \frac{b}{2}$. Et $\frac{6ab}{24b} = \frac{a}{4}$.

Demonstr. Nam fractio est quotus ex numeratore per denominatorem (§. 41.). Ergo resolutio rite facta (§. 40.). Et $\frac{42}{56} = \frac{7.6}{7.8} = \frac{6}{8} = \frac{3\times2}{4\times2} = \frac{3}{4}$.

§. 59. *Problema.* Numerum fractum reducere ad minorem speciem, seu resolvere fractionem in numeros speciei minoris.

Resolutio. Numerator fractionis ducatur in numerum speciei minoris, quem complectitur species major, et productum hoc dividatur per denominatorem. E. g. $\frac{4}{5}$ flor. $= \frac{4}{5} \times 60$ cruc. $= \frac{240}{5}$ cruc. $= 58$ cruc. Vel $\frac{3}{8}$ ℔ $= \frac{3}{8} \times 32$ Semiunc. $= \frac{96}{8}$ Semiunc. $= 12$ Semiunc.

Demonstr. Nam fractio multiplicatur, per numerum quemvis, si numerus in numeratorem ducatur (§. 43.), et resolvitur ad minorem speciem: si in numerum speciei minoris ducatur, quem species major complectitur. Ergo resolutio hoc pacto rite peragitur. Quare est $\frac{3^{o}}{4} = \frac{3\times6'}{4} = \frac{18'}{4} = 4'\frac{2}{4} = 4' + \frac{2}{4} \times 12'' = 4'\,6''$.

$$\text{Et } \frac{8^{\circ}}{9} = \frac{8 \times 6'}{9} = \tfrac{48'}{9} = 5'\tfrac{3}{9} = 5' + \frac{3.12}{9} = 5'\ 4''.$$

§. 60. *Problema.* Fractiones addere.

Resolutio. 1) Si sint ejusdem denominationis, addantur numeratores, subscribaturque summae denominator; sin: fiant ejusdem denominationis (§. 47.), ac tum instituatur additio.

2) Nova fractio, si spuria est, convertatur in mixtam (§. 56.), vel integra, et quantum licet ad minimos terminos reducatur. E. g.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{d}{g} = \frac{aag + cbg + dab}{bag}.$$

Demonstratio. Est enim pars aliquota totius aequalis partibus aliquotis summandorum (partium) (§. 34. Corol. 10.).

$$\text{Et } \frac{a}{b} = \frac{aag}{bag};\ \frac{c}{a} = \frac{cbg}{abg};\ \frac{d}{g} = \frac{dab}{gab}.$$

$$\text{Ergo } \frac{aag}{bag} + \frac{cbg}{abg} + \frac{dab}{abg} = \frac{aag + bcg + abd}{abg}.$$

$$\text{Et } 3a + \frac{7a}{3} = \frac{9a + 7a}{3} = \frac{16a}{3} = 5a + \frac{a}{3}.$$

$$\text{Nam } 3a + \frac{7a}{3} = 3a + 2a + \frac{a}{3} = 5a + \frac{a}{3}.$$

Schol. Quodsi integri numeri, et fractiones ad addendum dentur; possunt integri in fractiones converti, si illis 1, ut divisor, subscribatur. Ita $3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{3}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

§. 61. *Proclema.* Fractiones ab invicem subtrahere.

Resolutio. Si similes sint fractiones; numerator subtrahendi subducatur a numeratore minuendi, residuo subscribatur denominator; si dissimiles: reducantur ad eundem denominatorem, ac tum fiat subtractio. Reliqua ut in additione.

Demonstratio. $\frac{13a}{4} - \frac{6a}{4} = \frac{7a}{4}$. Et

$$\frac{6a}{4} - \frac{6a}{5} = \frac{30a - 24a}{20} = \frac{6a}{20} = \frac{3a}{10}.$$

Nam $\frac{13a}{4} - \frac{6a}{4} = \frac{13a - 6a}{4}$. Et cum sint

$(13a - 6a) = 7a$; erit etiam $\left(\frac{13a - 6a}{4}\right) = \frac{7a}{4}$,

quia aequalia per idem divisa aequale dant. Idem valet in altero exemplo.

Hinc erit $3 - \frac{5}{8} = \frac{24 - 5}{8} = \frac{19}{8} = 2\frac{3}{8} = 2 + \frac{3}{8}$.

§. 62. *Problema.* Fractiones invicem multiplicare.

Resolutio. 1) Si sint purae: numeratores inter se, et denominatores inter se multiplicentur; productum e numeratoribus divisum per productum ex denominatoribus aequale est facto fractionum.

2) Si sint fractiones mixtae, primum reducendae sunt ad puras, et tum fiat multiplicatio. Reliqua ut in additione. E. g.

$$\frac{3a}{4b} \times \frac{2c}{3a} = \frac{6ac}{12ab} = \frac{6c}{12b} = \frac{c}{2b}.$$

$$\text{Et} \left(3a + \frac{b}{d}\right) \times \left(3a + \tfrac{2}{3}\right) = \left(\frac{3ad + b}{d}\right)$$

$$\left(\frac{9a + 2}{3}\right) = \frac{(3ad + b)(9a + 2)}{3d} = \text{etc.}$$

$$5\tfrac{3}{4} \times 7\tfrac{1}{2} = \tfrac{23}{4} \times \tfrac{15}{2} = \frac{23 \times 15}{8}.$$

Demonstratio. Patet ex prioribus.

§. 63. *Problema.* Fractiones invicem dividere.

Resoletio. 1) Si fractiones sint purae: invertatur divisor (qui loco secundo scribitur), tum instituatur multiplicatio.

2) Si fractiones sint mixtae: reducantur ad puras, et tum fiat divisio. E. g.

$$\frac{3a}{b} : \frac{5g}{m} = \frac{3a}{b} \times \frac{m}{5g} = \frac{3am}{5bg}.$$

$$\left(3a + \frac{4b}{5}\right) : \left(3 + \frac{a}{3}\right) = \left(\frac{15a + 4b}{5}\right);$$

$$\left(\frac{9 + a}{3}\right) = \left(\frac{15 + 4b}{5}\right) \times \left(\frac{3}{9 + a}\right) =$$

$$\frac{(15 + 4b)3}{5(9 + 3)} = \text{etc.}$$

Demonstratio. Ex praecedentibus patet.

§. 64. *Theorema.* Summa, vel differentia duarum quantitatum multiplicatur per fractionem, si quaevis per hanc multiplicetur, et in primo casu

producta addantur, in secundo autem productum secundum a primo auferatur. E. g.

$$(a+b)\times\tfrac{5}{8}=\frac{5a}{8}+\frac{5b}{8},\ \text{nec non}$$

$$(a-b)\times\tfrac{5}{8}=\frac{5a}{8}-\frac{5b}{8}.$$

Demonstratio. Nam $(a+b)\times\frac{5}{8}=(5a+5b):8$ (§. 43. et §. 29. Cor. 3. Elem.) $=\frac{5a}{8}+\frac{5b}{8}$ (§. 34. Cor. 10. Elem.). Similiter $(a-b)\times\frac{5}{8}=(5a-5b):8$ (§. 43. et §. 29. Cor. 4) $=\frac{5a}{8}-\frac{5b}{8}$ (§. 34. Cor. 11. Elem.)

§. 65. *Theorema.* Summa vel differentia duarum quantitatum dividitur per fractionem, si quaevis earum per hanc dividatur, ac in casu primo quoti addantur, in altero autem secundus a primo subducatur. E. g.

$(a+b):\frac{5}{8}=a:\frac{5}{8}+b:\frac{5}{8}$; et $(a-b):\frac{5}{8}=(a:\frac{5}{8})-(b:\frac{5}{8})$.

Demonstratio. Est enim $(a+b):\frac{5}{8}=(a+b)\times\frac{8}{5}$ (§. 53.) $=(a\times\frac{8}{5})+(b\times\frac{8}{5})$ (§. 64.) $=a:\frac{5}{8}+b:\frac{5}{8}$. Similiter $(a-b):\frac{5}{8}=(a-b)\times\frac{8}{5}=a\times\frac{8}{5}-b\times\frac{8}{5}$ (§. 64.) $=a:\frac{5}{8}-b:\frac{5}{8}$ (§. 54.).

Coroll. 1. Ergo etiam quantitas quaelibet per summam vel differentiam duarum fractionum multiplicatur, si per quamvis multiplicetur, et in primo casu producta addantur, in altero secundum a primo subducatur. E. g.

$$a\times(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{5})=\frac{2a}{3}+\frac{4a}{5}.\ \text{Est enim}$$

$$a \times \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{5}\right) = \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{5}\right) \times a = \frac{2a}{3}+\frac{4a}{5}.$$ Et etiam

$$a \times \left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{5}\right) = a\left(\frac{10+12}{15}\right) = \frac{10a+12a}{15} =$$

$$\frac{10a}{15}+\frac{12a}{15} = \frac{2a}{3}+\frac{4a}{5}.$$ Tum

$$a \times \left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{5}\right) = \left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{5}\right) \times a = \frac{2a}{3}-\frac{4a}{5}.$$

Coroll. 2. Et quaelibet quantitas multiplicatur per quotum duarum fractionum, ſi per dividendum multiplicetur, et per diviſorem dividatur, e contrario dividitur illa per quotum duarum fractionum, ſi per inverſum quotientem multiplicetur. E. g.

$$a \times \left(\tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3}\right) = \frac{4a}{5} : \tfrac{2}{3}.$$ Eſt enim

$$a \times \left(\tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3}\right) = \left(\tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3}\right) \times a = \left(\tfrac{12}{10}\right) a = \frac{4a}{5} : \tfrac{2}{3}.$$

Et $a : \left(\tfrac{4}{5} : \tfrac{2}{3}\right) = a : \left(\tfrac{12}{10}\right) = a \times \tfrac{10}{12} = \frac{10a}{12} =$ $a\left(\tfrac{2}{3} : \tfrac{4}{5}\right)$.

Coroll. 3. Quotus, in quo dividendus quaecunque quantitas, diviſor autem fractio eſt, multiplicatur per fractionem, vel dividitur, ſi dividendus per hanc multiplicetur, vel dividatur. E. g.

$$\left(a : \tfrac{2}{3}\right) \times \tfrac{6}{7} = \frac{6a}{7} : \tfrac{2}{3}.$$ Eſt enim

$(a:\frac{2}{3})\,\frac{6}{7} = \frac{3a}{2}\times\frac{6}{7} = \frac{6a\times 3}{7\times 2} = \frac{6a}{7}:\frac{2}{3}$. Et

$(a:\frac{2}{3}):\frac{6}{7} = (a:\frac{6}{7}):\frac{2}{3}$. Est enim

$$(a:\tfrac{2}{3}):\tfrac{6}{7} = \frac{3a}{2}:\tfrac{6}{7} = \frac{3a\times 7}{2\times 6} = (a:\tfrac{6}{7}):\tfrac{2}{3}.$$

Coroll. 4. Quotus in quo dividendus quaecunque quantitas, divisor autem fractio est, multiplicatur, vel dividitur per quotientem duarum fractionum, si dividendus per dividendum, et divisor per divisorem multiplicetur, vel dividatur. E. g.

$(a:\frac{5}{8})\times(\frac{3}{4}:\frac{2}{7}) = \frac{3}{4}a:\frac{10}{56}$, et

$(a:\frac{5}{8}):(\frac{3}{4}:\frac{2}{7}) = \frac{4}{3}a:\frac{35}{16}$. Est enim

$$(a:\tfrac{5}{8})\times(\tfrac{3}{4}:\tfrac{2}{7}) = \left(\frac{8a}{5}\right)\times\left(\frac{7.3}{4.2}\right) = \frac{56a\times 3}{10\times 4}$$

$$= \frac{3a}{4}\times\tfrac{56}{10} = \frac{3a}{4}:\tfrac{10}{56}. \text{ Et}$$

$$(a:\tfrac{5}{8}):(\tfrac{3}{4}:\tfrac{2}{7}) = \frac{8a}{5}:\left(\frac{3.7}{4.2}\right) = \frac{16a.4}{35.3} = \frac{16\times 4a}{3\times 35}$$

$$= \frac{4a}{3}:\tfrac{35}{16}.$$

Schol. In fractionibus algebraicis bene attendendum est ad signa, ut rite fiat designatio cujusvis facti et quoti. Hinc

1) $\frac{+3a}{-2b} = -\frac{3a}{2b}$; nam $\frac{+3a}{-2b} = +3a:(-2b)$, signa inaequalia dant in quoto $(-)$.

2) $\frac{-3a}{+2b} = -\frac{3a}{2b}$; nam $(-3a) : +2b$, ubi quotus negativus evadit.

3) $\frac{-4a}{-3b} = +\frac{4a}{3b}$. Nam $\frac{-4a}{-3b} = (-4a) : (-3b)$, quod quotum dat positivum.

4) $\frac{(3a+2d)}{3} : \left(\frac{3a-3d}{4}\right) = \frac{4(3a+2d)}{3(3a-3d)}$.

5) $\frac{(3a+2d)}{3} : \left(\frac{-3(3a-3d)}{4}\right) = \frac{(3a+2d)}{3} \times -\frac{4}{(3a-3d)} = -\frac{4(3a+2d)}{3(3a-3d)}$.

6) $\left(\frac{3a-5d}{6}\right) \times \left(\frac{-(3a+2d)}{4}\right) = \left(\frac{3a-5d}{6}\right) \times \left(\frac{-3a-2d}{4}\right) = \frac{(3a-5d)(-3a-2d)}{24}$.

Sectio Secunda.

De Quantitatum Potentiis, et Radicibus.

Caput I.

De Potentiis et Radicibus quantitatum generatim.

§. 66. Productum id, quod oritur, ſi quaecunque quantitas *a* per ſe ipſam multiplicatur, vocatur *quadratum*, et quantitas *a* ipſa, *radix quadrata;* ſic eſt a$\times$a $=$ aa, quadratum, et *a* radix quadratica.

aa$\times$a dat *aaa*, quod productum *cubus* radicis *cubicae* $=$ *a*, dicitur; aaa $\times$ *a* dat *aaaa*, quod productum vocatur *biquadratum*, radicis biquadratae *a*, et ita porro.

Quaelibet quantitas per ſe ipſam multiplicari poteſt; igitur quaevis quantitas poteſt ut radix conſiderari.

Itaque, quaecunque radix *a* in 1 ducta $=$ 1$\times$a $=$ a. | prima multiplicatio; haec quantitas *a* per ſe ipſam multiplicata, vel

a$\times$a$=$aa	multiplicatio ſecunda;
aa$\times$a$=$aaa	tertia multiplicatio;
aaa$\times$a$=$aaaa	quarta multiplicatio;
aaaa$\times$a$=$aaaaa	quinta multiplicatio; et ſic porro.

Igitur quaevis quantitas *a*, ut per 1 multiplicata, conſiderata, vel 1a, eundem valorem retinet, quem antea habuit, priusquam eſſet multiplicata

per 1, vel $a \times 1 =$ idem potest (valet), ac (a); $a \times a$ idem potest ut aa; aa $\times$ a idem potest, ut aaa; et sic porro. Inde dicitur *a*, *potentia prima*, *aa potentia secunda*, *aaa potentia tertia*, *aaaa potentia quarta*, *quantitatis a*; et quantitas (a) n vicibus deinceps (junctim) scripta dicitur *potentia ntesima* (vel *quaelibet*) quantitatis *a*. Quoniam autem hoc multum daret scribendum, tantum scribitur quantitas (a), illique adjungitur signum potentiae, quod *exponens* dicitur, scilicet *potentiae*. Denotat ille ergo, quoties quantitas conjunctim scribenda foret, vel quoties secum ipsa multiplicanda sit. *Exponens* (potentiae) exprimitur per numeros arabicos supra literas adscriptos. Potest tamen etiam generaliter quaevis litera exponentem (potentiae) designare. Ut: $a \times 1$, aa, aaa, aaaa, aaaaa, - - - - - - , a (n vicibus) scribendum, hoc modo scribuntur: $a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6$ - - - - - - a^n. Lege: $a^1 =$ a primae, $a^2 =$ a secundae, $a^3 =$ a tertiae, $a^4 =$ a quartae, $a^5 =$ a quintae, $a^6 =$ a sextae, et ita porro - - - - - -, $a^n =$ a potentiae ntesimae; vel ejus, quot unitates in (n) continentur.

Vel loco 2, 4, 8, 16, 32, 64 - - - - - - - -
Scribas 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 - - - - - 2^n.

Ipsa multiplicatio quantitatis cujusdam per se ipsam (semel aut aliquoties), vocatur ejusdem quantitatis Elevatio ad potentiam (potentias).

Quaevis quantitas potest ut potentia prima considerari. Est enim $a = a \times 1 = a^1$. Vel $x \times 1 = x^1$. Dantur igitur *exponentes quantitatis*; et etiam *exponentes potentiae*, si nempe quantitatis qua potentiae spectatae rursum exponens designatur. Erit itaque in quantitate a^8, octonarius exponens quantitatis. Ac in quantitate $(a^2)^3$ est ternarius exponens potentiae, binarius exponens quantitatis.

§. 67. *Signum radicis* est illud $\sqrt{}$. Cum autem radices simili modo diversae esse possunt, ut potentiae, quippe, *secunda* vel quadrata, 3tia, vel *cubica*, 4ta, 5ta, 6ta - - - - et ntesima radix; hinc etiam ea radix per exponentem signatur, de qua modo agitur; hujus modi exponens in appertúram signi radícis positus (signo radicáli inscriptus), appellatur *exponens radicis*.

Ut $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, - - - - - $\sqrt[n]{}$, dicitur radix 2da, 3tia, - - - - - ntesima. Quemadmodum potentia prima, ipsa est radix; sic etiam radix prima, ipsa est potentia. Ergo $\sqrt[1]{a} = a$; et $a^1 = a$. Cum itaque quaestio semper cum 2da radice ordiatur; ideo radix 2da vel quadrata solo signo $\sqrt{}$ radicali indicatur, quin exponens inscribatur; qui ergo semper subintelligitur.

§. 68. *Calculus* quantitatum *radicalium*, vocatur methodus supputandi per omnes species (computationes) in quantitatibus istius generis, cum diversis exponentibus potentiae et radicis. Sequentia Theoremata ad hunc referenda erunt.

§. 69. Quantitates cum *diversis* exponentibus, diversae sunt. Quaevis quantitas per suum exponentem valorem quemdam obtinet; et diversi exponentes quantitati eidem dant diversum valorem. Si itaque a^2 et a^3, vel a^5 perpendantur, facile intelligetur ea esse heterogenea; est enim $a^2 = aa$, et $a^3 = aaa$; $a^5 = aaaaa$.

§. 70. *Coroll.* 1. Quantitates cum diversis exponentibus adduntur, vel subtrahuntur ab invicem, si cum signis suis in loco summae, vel mutatis subtrahendi in loco differentiae ponantur.

Sunt enim heterogeneae, et istae nulla alia ratione addendae vel subtrahendae sunt. Unde $a + a^3 - 5a^6$ = summae in minimis terminis; et $3a^2 - 5a^5 + a^7$ = summae expressionis simplicissimae.

Coroll. 2. Quantitates eosdem exponentes habentes possunt in unam summam colligi, et ab invicem subtrahi. Sunt enim homogeneae. Ita $a^3 + a^3 = 2a^3$; $a^n + a^n = 2a^n$; $9a^4 - 5a^4 = 4a.^4$ Simili modo $ca^n + da^n = (c + d) a^n$; $ca^n - da^n = (c - d) a.^n$

§. 71. *Theorema.* Exponens producti aequalis est summae exponentium suorum factorum. Id est $a^n \times a^m = a^{(n+m)}$.

Demonstratio. $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa = a^5$
$= a^{2+3}$. Et
$a^1 \times a^4 = a \times aaaa = a^5 = a^{1+4}$. Et generaliter $a^n \times a^m = a$ (n vicibus deinceps positum) $\times$ a (m vicibus positum) = a (n + m) vicibus conjunctim scriptum; ergo $= a^{n+m}$. Quare

$$\begin{array}{r} 5a^2 - 3b^3 \\ 2a^3 + 2b^2 \\ \hline 10a^5 - 6a^3 b^3 \\ + 10a^2 b^2 - 6b^5 . \end{array}$$

§. 72. *Theorema.* Exponens quotientis aequatur exponenti dividendi minus exponente divisoris.

Demonstratio. $a^m : a^n = a^{m-n}$. Nam
$a^3 : a^2 = aaa : aa = a^1 = a^{3-2}$. Et
$a^5 : a^3 = aaaaa : aaa = aa = a^2 = a^{5-3}$. Et

universaliter $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Hinc erit

$$\frac{12a^4b - 6a^2c^2}{3a} = 4a^3b - 2ac^2.$$

§. 73. *Theorema.* Quaevis quantitas habens zerum pro exponente aequalis est unitati, id est: $a^0 = 1$.

Demonstratio. Sit exponens dividendi aequalis exponenti divisoris; erit

$a^2 : a^2 = a^{2-2}$ (§. 72.) $= a^0$, et in genere

$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$. Sed

$a^2 : a^2 = \frac{a^2}{a^2} = 1$ (§. 33.), et

$a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$. Igitur $a^m : a^m = a^0$, et etiam

$a^m : a^m = 1$. Consequenter $a^0 = 1$. (Axioma: quae aequalia eidem tertio, sunt aequalia inter se).

Schol. Idem demonstrant Logarithmi.

§. 74. *Theorema.* Omnis quantitas elevata ad potentiam negativam (cum negativo exponente) aequatur unitati, divisae per eandem quantitatem elevatam ad eandem positivam dignitatem (cum eodem positivo exponente), hoc est: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = 1 : a^n$.

Demonstratio. Est enim $a^n = a^{m-m-n}$. Sed

$a^{m-m-n} = a^m : a^{m+n}$ (§. 72.); et

$$a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{a^m : a^m}{a^{m+n} : a^m} \text{ (§. 45.) } = \frac{1}{a^n}$$

Ergo $\frac{1}{a^n}$ seu $1 : a^n = a^{-n}$. Vel

$a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$. Sed $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{a^2 : a^2}{a^5 : a^2}$

$= \frac{1}{a^3} = 1 : a^3$. Igitur etiam

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = 1 : a^3 .$$

§. 75. *Theorema.* Quaevis quantitas positivi exponentis aequalis est fractioni, cujus numerator $= 1$, et cujus denominator aequalis eidem quantitati cum eodem positivo exponente, hoc est:

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}} = 1 : a^p .$$

Demonstratio. Est enim $a^{-3} : a^{-5} = a^{-3+5} = a^2$ (§. 72.) Sed etiam est $a^{-3} : a^{-5} = \frac{a^{-3}}{a^{-5}} = \frac{a^{-3} : a^{-5}}{a^{-5} : a^{-3}}$ (§. 45.) $= \frac{1}{a^{-2}}$. Ergo $a^2 = \frac{1}{a^{-2}} = 1 : a^{-2}$ Et generaliter $a^{-m} : a^{-m-p} = a^{-m+m+p} = a^p$. Sed etiam $a^{-m} : a^{-m-p} = \frac{a^{-m}}{a^{-m-p}} = \frac{a^{-m} : a^{-m}}{a^{-m-p} : a^{-m}}$ (§. 45.) $= \frac{1}{a^{-p}}$. Ergo in genere

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}} = 1 : a^{-p} .$$

Schol. Hoc etiam ex praecedenti theoremate eruitur. Nam cum sit $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$; erit $\frac{1}{a^{-p}} =$

$1 : a^{-p} = 1 : \frac{1}{a^p} = \frac{a^p}{1} = a^p$. Ergo $a^p = \frac{1}{a^{-p}}$.

Coroll. In qualibet expressione (quantitatis) licet quemvis factorem cum mutato signo sui exponentis de numeratore in denominatorem, vel ex denominatore in numeratorem transponere, quin hoc pacto valor expressionis mutetur. Est enim

1) $a^n b^{-p} = a^n \times b^{-p} = a^n \times \frac{1}{b^p} = \frac{a^n}{b^p}$.

2) $a^n b^{-p} = a^n \times b^{-p} = \frac{1}{a^{-n}} \times b^{-p} = \frac{b^{-p}}{a^{-n}}$.

3) $a^n b^{-p} = \frac{1}{a^{-n}} \times b^{-p} = \frac{1}{a^{-n}} \times \frac{1}{b^p} =$

$\frac{1}{a^{-n} b^{+p}}$.

§. 76. *Theorema.* Quaevis potentia quantitatis cujuspiam obtinetur (quantitas qua potentia, ad quamlibet potentiam elevatur), si exponens quantitatis in exponentem potentiae ducatur, hoc est: $(a^n)^m = a^{nm} = a^{n \times m}$.

Demonstratio. Si potentiae (quantitates cum exponentibus) rursus ad potentiam sint elevandae; erit, $(a^2)^2 = a^2 \times a^2 = a^4 = a^{2 \times 2}$ (p. defin.)

$(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3 \times 2}$.

$(a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5 = a^{15} = a^{5 \times 3}$. Et generaliter $(a^n)^m = (a^n)$ m vicibus junctim scriptum, hoc vero $= a^{nm} = a^{n \times m}$.

Coroll. Hinc *a* ut potentia ſpectata ad 5tam elevata, ſeu $(a)^5 = (a^1)^5 = a^{1 \times 5} = a^5$.

§. 77. *Theorema.* Quaevis radix quantitatis cujuspiam obtinetur (exponens radicis cujusvis invenitur), ſi exponens quantitatis per exponentem radicalem dividatur. Id eſt $\sqrt[q]{a^n} = a^{\frac{n}{q}}$.

Demonſtr. Extrahenda radix qteſima ex quantitate a^n, iterum ad qteſimam potentiam elevata, rurſum huic quantitati a^n, aequalis eſſe debet (per defin.). Sit jam iſta qteſima radix ex quantitate $a^n = a^x$; erit

$$(a^x)^q = a^n. \quad \text{Seu (§. 76.)},$$

$$a^{xq} = a^n, \quad \text{Hoc vero; erit etiam}$$

$$xq = n; \text{ ergo } x = \frac{n}{q}. \quad \text{Igitur}$$

$$\sqrt[q]{a^n} = a^x = a^{\frac{n}{q}} = (a)^{\frac{n}{q}}.$$

Vel magis intuitive. Sit radix cubica quantitatis $a^3 = a^x$: erit quoque

$\sqrt[3]{a^3} = a^x$; ergo elevando radicem cubicam;

$(a^x)^3 = a^3$; et (§. 76.)

$a^{3x} = a^3$. Igitur $3x = 3$; ergo $x = \frac{3}{3}$.

Hinc $\sqrt[3]{a^3} = a^x = a^{\frac{3}{3}} = a^1 = a$.

Coroll. Itaque quivis exponens radicalis poteſt in fractum exponentem potentiae permutari. Et viciſſim, quemlibet exponentem potentiae fractum per integrum potentiae, et integrum radicalem (radicis) exprimere licet. Semper enim

est denominator fractionis exponens radicis, et numerator ejusdem exponens potentiae. Unde:

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \text{et } a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[4]{a^5}.$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \quad \text{et } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

§. 78. *Problema.* Computationes praedictas (modos vel species supputandi) cum quantitatibus diversi exponentis radicalis instituere.

Resolutio, Mutentur exponentes radicales in fractos exponentes potentiae, et tum fiat operatio secundum regulas pro exponentibus potentiae datas. E. gr.

$$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

$$\sqrt[n]{a^q} \times \sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{q}{n}} \times a^{\frac{p}{m}} = a^{\frac{q}{n}+\frac{p}{m}} = a^{\frac{mq+np}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{mq+np}}.$$

$$\sqrt[2]{a^3} : \sqrt[3]{a} = a^{\frac{3}{2}} : a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{9-2}{6}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}.$$

$$\sqrt[n]{a^p} : \sqrt[m]{a^q} = a^{\frac{p}{n}} : a^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{p}{n}-\frac{q}{m}} = a^{\frac{mp-nq}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{mp-nq}}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^q}\right)^m = \left(a^{\frac{q}{n}}\right)^m = a^{\frac{mq}{n}}$$

$$\sqrt[m]{\left(\sqrt[n]{a^q}\right)} = \sqrt[m]{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{q}{n}:m} = \sqrt[mn]{a^q}.$$

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[-3]{a} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{-1}{3}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}.$$

$$\sqrt[3]{a^2} : \sqrt[6]{a^7} = a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{7}{6}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{7}{6}} = a^{\frac{12-21}{18}} =$$

$$a^{\frac{-9}{18}} = a^{-\frac{1}{2}} = 1 : a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{a}}$$; et id genus pl.:

§. 79. *Theorema.* Potentiae vel dignitates quantitatis positivae, semper sunt positivae; quantitatis negativae vero eae duntaxat, quarum exponens est numerus par, 2, 4, 6, 8 -----, illae, quarum exponens est numerus impar, 1, 3, 5, 7, 9, 11, ------ etc. sunt negativae.

Demonstr. Sit enim radix *a*; erunt potentiae quantitatis $(+a)$ secundum ordinem hae: $+a$, $+a^2$, $+a^3$, $+a^4$, $+a^5$, $+a^6$, $+a^7$, $+a^8$, $+a^9$, $+a^{10}$, $+a^{11}$, $+a^{12}$ ------- $+a^{100}$,--- $+a^{n-1}$ $+a^n$ $+a^{n+1}$; et quantitatis $(-a)$ sequentes:

$-a \mid +a^2 \mid -a^3 \mid +a^4 \mid -a^5 \mid +a^6 \mid$
$-a^7$ ------- $\mid -a^{n-1} \mid +a^n \mid -a^{n+1}$.

Sunt ergo potentiae quantitatis $(+a)$ omnes positivae; quantitatis $(-a)$ vero tantum illae, quarum exponens numerus par est etc.

Coroll. Inde primo:

1.) Radix, cum exponente imparis numeri, semper habet signum quantitatis illius, de cujus radice sermo est.

Ita $\sqrt[3]{a^3} = +a$; et $\sqrt[3]{-a^3} = -a$.

$\sqrt[9]{a^9} = +a$; et $\sqrt[9]{-a^9} = -a$.

2.) Tum, radix habens exponentem parem tam poſitiva, quam negativa eſt, dummodo quantitas de cujus radice agitur, ſit poſitiva. Ut

$\sqrt[2]{a^2} = \pm a$. Eſt enim $+a \times +a = +a^2$, et $-a \times -a = +a^2$.

Seu $\sqrt[6]{a^6} = \pm a$; quia $(+a)^6$ et etiam $(-a)^6 = a^6$.

3. Denique, radix habens exponentem parem *impoſſibilis* eſt, ſi quantitas, de cujus radice inquiritur, ſit negativa. Ita

$\sqrt[2]{-a^2}$; ſeu $\sqrt[4]{-a^4}$; ſeu $\sqrt[6]{-a^6}$; ſeu $\sqrt[8]{-a^8}$ etc. ſunt quantitates *impoſſibiles* ſeu *imaginariae*,

Scholion. Verum, non ipſa quantitas negativa, non $-a^2$, vel $-a^4$, vel $-a^6$, vel $-a^8$ impoſſibilis, ſed earum radix, quae aequalem (ſimilem) exponentem (nempe parem) habet, impoſſibilis eſt.

§. 80. Quantitates poſitivae ſub ſigno radicali, quarum radix deſignata (indicata) accurate inveniri poteſt, etiam ab illis diſcernendae ſunt, quarum radix nunquam perfecte detegi (exprimi) poteſt. *Illae* dicuntur *rationales*, hae *irrationales* ſeu ratione carentes. Ut

$a = \sqrt[2]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^9} = a^3$; $\sqrt[2]{a^4} = a^2$; $\sqrt[3]{a^6} = a^2$,

$\sqrt[2]{9} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$; etc. ſunt quantitates rationales.

Quantitates autem $\sqrt[2]{a^3}$; $\sqrt[6]{a^4}$; $\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^7}$; $\sqrt[2]{7^2}$; et id genus, ſunt irrationales.

§. 81. *Theorema.* Quaelibet potentia producti cujuspiam aequalis est facto ex potentiis iisdem (similibus) suorum factorum.

Demonstr. $(ab)^3 = ab + ab + ab = aaabbb = a^3 b^3$, et in genere $(ab)^n =$ a (nties sumptum) $\times$ b (n vicibus scriptum) $= a^n b^n$.

Coroll. Unde productum ad potentiam datam elevatur; si quivis factor ejus ad eandem elevetur. Hinc $(a^2 b^3)^3 = a^6 b^9$ Est enim $(a^2 b^3)^3 = a^2 b^3 \times a^2 b^3 \times a^2 b^3 = a^{2+2+2} \times b^{3+3+3} = a^6 b^9$.

§. 82. *Theorema.* Radix quaevis producti cujuspiam aequalis est facto ex similibus radicibus (ejusdem denominationis) suorum factorum.

Demonstr. Sit extrahenda quaecunque vel ntesima radix ex producto *ab*; erit $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$ (81. §.) $= \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$. (§. 77. Cor.).

Coroll. 1. Hinc ex quovis producto extrahitur radix quaevis; si haec ipsa ex quolibet factore extrahatur, et tum radices hae in se ducantur. Unde erit $\sqrt[n]{a^n b} = a^{\frac{n}{n}} b^{\frac{1}{n}} = a b^{\frac{1}{n}} = a \sqrt[n]{b}$.

Coroll. 2. Si itaque productum aliquod sub quocunque signo radicali factorem quempiam continet, ex quo radix similis extrahi potest; talis factor potest semper sub signo radicali deleri, ejusque radix similis (ejusdem nominis) ut factor ante signum radicale scribi. Et vice versa, quivis factor signo radicali praefixus potest omitti, ejusque potentia radici similis (ejusdem gradus cum radice) ut factor signo radicali inferri. Itaque $\sqrt[3]{a^3 b} = a \sqrt[3]{b}$; et $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

§. 83. *Theorema.* Quaevis potentia fractionis cujuspiam aequalis eſt potentiae ejusdem gradus (ſimilis) numeratoris, diviſae per potentiam ejusdem gradus denominatoris.

Demonſtr. Eſt enim $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$

Et generaliter $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Coroll. Quaevis fractio ergo elevatur ad potentiam datam; ſi numerator et denominator ejusdem ad hanc eleventur. Ita $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^3 = \frac{a^9}{b^6}$

§. 84. *Theorema.* Quaevis radix fractionis alicujus aequalis eſt radici ejusdem gradus numeratoris, diviſae per radicem ejusdem gradus denominatoris. Id eſt $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Demonſtr. Eſt enim $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$

(§. 83.) $= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (§. 77. Coroll.).

Coroll. Ex fractione ergo quapiam extrahitur radix petita, ſi ex numeratore et denominatore extrahatur. Hinc $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^9}} = \frac{a^{\frac{6}{3}}}{b^{\frac{9}{3}}} = \frac{a^2}{b^3}$.

§. 85. Si quantitas binomia (complexa $(a+b)$ ad potentiam ſit elevanda; dabit haec in ſe ipſam ducta, 2dam potentiam; haec ducta in primam dabit tertiam potentiam; haec ducta in primam dabit 4tam potentiam; et nteſima potentia ducta in primam dabit $(n+1)^{mam}$ potentiam quantitatis $(a+b)$. Eſt enim

$$(a+b)\,(a+b)=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$
$$(a+b)^2\times(a+b)=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$
$(a+b)^3\times(a+b)=(a+b)^4$. In genere
$$(a+b)^n\times(a+b)=(a+b)^{n+1}.$$

Coroll. 1. Quadratum perfectum ſeu completum quantitatis binomiae conſtat ex quadrato termini primi, et ſecundi, et ex duplo facto termini primi in ſecundum. Eſt enim

$$(a+b)^2=a^2+2.\,ab+b^2=b^2+2ba+a^2.$$

Coroll. 2. Cubus binomii conſtat ex cubo termini primi et ſecundi, et ex factis tripli quadrati termini cujusvis in terminum alterum. Eſt enim $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=b^3+3b^2a+3ba^2+a^3$.

Ambae hae formulae ſunt generales, et cum terminos modo iſto habent locatos; dicuntur *ordinatae, locatae.*

Coroll. 3. Ope formulae quadrati binomii poſſunt quadrata radicis cujusvis polynomiae inveniri. Nam ſumma omnium praecedentium partium, poteſt ut pars prima, et terminus ultimus ut ſecunda pars conſiderari; hinc etiam loco quadrati ſummae terminorum praecedentium valvorem ejus inſtituere licet. Inde E. g. eſt $(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$; ſi $(a+b)$ pro

prima, et $+c$ pro altera parte binomii assumatur; ergo hoc $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; si termini evolvuntur; et ita porro. Vel $(2+3+5)^2 = (2+3)^2 + 2\,(2+3)\,5 + 25 = 4+12+9+20+30+25 = 100$.

Idem valet de cubo.

Caput II.

Methodus extrahendi radicem quadratam ex quantitatibus complexis algebraicis.

§. 86. *Problema.* Ex quadrato binomii radicem quadratam extrahere. Id est extrahere radicem quadraticam ex quantitate $= a^2 + 2ab + b^2$.

Resolutio. Primum extrahatur radix quadrata ex primo termino a^2, quae est $= a$; haec radix inventa (a) rursus ad quadratum elevata $= a^2$ subtrahatur a quadrato (a^2) sub signo radicali. Tum incipiatur divisio cum residuo $2ab + b^2$ per $2a$ (duplum radicis inventae (a)), ut b pars radicis, et divisoris secunda inveniatur; hoc inventum b ponatur ad primum terminum radicis (a), et simul ad primum terminum divisoris. Deinde multiplicetur per b (radicis terminum secundum) totus divisor $2a + b$, subducaturque productum ($2ab + b^2$) ab illo sub signo radicali. Hoc modo omnes termini elidentur, quia $a^2 + 2ab + b^2$ est quadratum perfectum.

Operatio ipſa hoc modo inſtituitur:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$
$$+a^2$$
$$-$$
$$2ab + b^2 : (2a + b)b$$
$$+2ab + b^2$$
$$- \quad -$$
$$0.$$

Vel etiam ſequenti modo:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$$
$$a^2$$
$$-$$
$$2ab : 2a \times b$$
$$+2ab$$
$$-$$
$$+b^2$$
$$+b^2$$
$$-$$
$$0.$$

Demonſtr. Quoniam $\sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+b)\,b}$; et $\sqrt{(a+b)^2} = (a+b)^{\frac{2}{2}} = a+b$; erit itaque prima pars radicis complexae $a = \sqrt{a^2}$; et altera pars b ejusdem continetur in expreſſione $2ab + b^2$ (vel pars ſecunda (b) $= \sqrt{b^2}$, et prima continetur in $2ab + a^2$). Ut ergo b ex ($2ab + b^2$ (inveniatur; reſiduum $= 2ab + b^2$ dividendum eſt per $(2a + b)$; nam $2ab^1 + b^2 = (2a+b)b$, et $b = \frac{2ab + b^2}{2a + b}$.

Coroll. Ut ex hac ultima expressione (b) accomodatius inveniatur; potest haec divisio subdividi, et imprimis 2ab per 2*a* dividi, tum 2a per *b* multiplicari, deinde 2ab subtrahi; denique *b*² subtrahi.

Hinc $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1.$

a^2

$-$

$2a + 1 : (2a + 1) \times 1$

$2a + 1$

$- \quad -$

0.

Vel $\sqrt{a^2 + 2a + 1} = a + 1$

a^2

$-$

$2a : 2a \times 1$

$2a$

$-$

$+1$

-1

0.

§. 87. *Problema.* Extrahere radicem quadraticam ex quadrato trinomii.

Resolutio. Fiat operatio ut antea. Et erit:

$\sqrt{a^2 + 2ab + 2ad + b^2 + 2bd + d^2} = a + b + d.$

a^2

$-$

$$(2ab + 2ad + b^2 + 2bd + d^2) : (2a + b) \times b$$
$$2ab + b^2$$
$$- \quad -$$

$$(+ 2ad + 2bd + d^2) : (2a + 2b + d) \times d$$
$$2ad + 2bd + d^2$$
$$- \quad - \quad -$$

$$0.$$

Inventis jam $(a+b)$, et ſubtracto eorum quadrato, remanent adhuc $(2ad+2bd+d^2)$; in his itaque tertia pars radicis contenta eſt. Haec invenitur: ſi reſiduum $(2ad+2bd+d^2)$ per $(2a+2b)$ dividi inhoetur, nam $\frac{2ad+2bd+d^2}{2a+2b+d}$ $= d =$ parti tertiae radicis trinomiae. Tertia igitur pars *d*, ſimili modo invenitur, ut pars ſecunda *b*; hoc ſolo diſcrimine, quod $(a+b)$ tanquam pars prima ſpectetur, et per $(2a+2b)$ diviſio inhoetur.

Coroll. In polynomio partes inventae tres ſpectantur, pro parte prima; partes inventae quatuor pro prima, et ita porro, et ſemper invenitur data methodo pars quarta, quinta et ita porro, radicis datae polynomiae.

Caput III.

De Extractione radicis quadratae e numeris.

§. 88. *Theorema.* Si quilibet numerus quadratus, ut 444, vel 24844, ab unitate incipiendo in claſſes, quamvis duarum notarum, diſtinquitur;

radix ejusdem ex tot notis conſtat, quot claſſes numerus datus habet. In ultima ſeu ſiniſtima claſſe poteſt tantum una nota eſſe.

Demonſtr. Sunt enim quadrata numerorum haec:

$1^2 = 1$	$8^2 = 64$
$2^2 = 4$	$9^2 = 81$
$3^2 = 9$	$10^2 = 100$
$4^2 = 16$	$100^2 = 10000$
$5^2 = 25$	$1000^2 = 1000000$
$6^2 = 36$	$10000^2 = 100000000$
$7^2 = 49$	$100000^2 = 10000000000$; et ita porro

Igitur conſtat radix quadrata ex una nota, dum quadratum unam vel duas; ex duabus notis, dum quadratum tres vel quatuor; ex tribus notis, dum quadratum quinque vel ſex; ex quatuor notis, dum quadratum ſeptem vel octo; ex notis (n) in genere; dum quadratum $(2n-1)$ vel $2n$ notas continet.

Nempe claſſi altiori quadrati ſemper rurſus altior cyfra radicis ejusdem reſpondet. Ergo et caetera.

E. g. Numerus $144 = 1,44$ duas claſſes habet; $2,48,44 = 24844$ tres claſſes; itaque radix eorum totidem cyfras.

Scholion. Poteſt etiam numerus datus algebraicae exprimi, ut $144 = 100 + 44 + 4$. Ubi $100 = a^2$

$$44 = 2ab + b^2 \quad \left\{ \quad 40 = 2ab \right.$$
$$144 = a^2 + 2ab + b^2 . \quad \left\{ \quad 4 = b^2 . \right.$$

Vel $576 = 400 + 160 + 16 = (20 + 4)(20 + 4)$.

§. 89. *Problema.* E dato quadrato numerico ut cunque magno radicem quadratam extrahere.

Resolutio. Numerus datus dividatur in classes a dextris ad sinistras, cuivis duas notas assignando, licet sinistimae classi unica remaneat nota. Tum classis signo radicali proxima spectetur tanquam a^2, classis sequens ut $2ab+b^2$, si duae adsint classes, fiatque eadem operatio, quae in expressione algebraica praescripta erat.

Si tres classes numero sint dato; inventum jam (a+b), vel inventa radix binomia, pro prima parte ejus; et si sint quatuor classes, inventa radix trinomia pro prima parte radicis assumenda est, et ita porro, ubi semper pari modo proceditur. Patet quoque, ad residuum quodvis remanens attendendum esse, quod suum semper significatum retinere debet.

Exempla. $\sqrt{1,44} = 12$

a^2) — 1

44 : 22 (2a+b)

22×2 (2a+b)b

44

—

0.

Item $\sqrt{5,76} = 24$

a^2) 4

176 : 44 (2a+b)

44×4 (2a+b)b

176 ($2ab+b^2$)

—

0.

Vel hoc modo:

$$\sqrt{576} = \sqrt{400 + 160 + 16} = 20 + 4$$

$$a^2)\ \ 400$$

$$-$$

$$(160 + 16) : (40 + 4) \times 4$$

$$- \ 160 + 16$$

$$-$$

$$0.$$

Demonſtratio. Diſtributio in claſſes indicat, quot notas radix quaeſita dati quadrati habere debeat. Et quoniam quivis numerus quadratus algebraice exprimi poteſt (in partes illum reſolvendo); hinc etiam in extractione radicis ejusdem pari modo procedendum eſt.

Schol. 1. In notis numericis notandum, valorem cyfrae a ſuo loco dependere, ideoque quamvis eo altiorem eſſe, quo ſiniſterior eſt.

Schol. 2. In operatione allata notae ſeu cyfrae homogeneis ſubſcriptae exiſtunt, neglectis zeris, quia hi exiſtentes nullo modo numerum mutant. Dum zeri ſcribuntur, operatio in ſequentem non tam commodam abit:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{1{,}44} = 12 = 10 + 2 & \sqrt{576} = 24 = 20 + 4 \\
100 & 400 \\
\hline
44 : (20 + 2) & 176 : (40 + 4) \\
22 \times 2 & 44 \times 4 \\
44 & 176 \\
\hline
0. & 0.
\end{array}$$

Schol. 3. Placet nonnullis modo procedere sequenti: Dividunt nempe numerum quadratum in classes, tum quaerunt radicem classis primae, subducuntque ejus quadratum a cyfris primae classis. Residuo si quod adest, classem sequentem adscribunt, deinde duplicant inventam radicem, subscribuntque duplam radicem hanc numero dividendo ita, ut unus locus ad dextram remaneat vacuus, porro dividunt; quotum inventum in loco vacuo ponunt, totum (divisorem videlicet) multiplicant per quotum, subducuntque productum. Postea classis proxima adscribitur, radix tota inventa duplicatur, rursus ita scribitur, ut unus locus vacuus supersit, et caeterum sic proceditur (operatur) ut in prima divisione. Unde invenitur:

$\sqrt{5{,}76} = 24$	$\sqrt{144} = 12$
4	1
176	44
44 × 4	22 × 2
176	44
0.	0.

$\sqrt{18,14,76} = 426.$

```
16
---
214
 82 × 2
164
---
5076
 846 × 6
5076
---
 0.
```

$\sqrt{18,14,76} = 426.$

```
16
---
214
 82
  2
164
---
5076
 846
   6
5076
---
   0.
```

$\sqrt{1,70,30,25} = 1305.$

```
1
---
 70
 23
  3
— 69
---
 130
 260
   0
— 000
---
 13025
  2605
     5
— 13025
---
     0.
```

§. 90. ***Problema.*** **Extrahere radicem quadratum ex fractione numerica.**

Resolutio. Extrahatur radix ex numeratore et simul ex denominatore. Hinc $\sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{2}{4}$. Est enim $\frac{2}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{16}$. $\sqrt{\frac{144}{36}} = \frac{12}{6}$. $\sqrt{\frac{100}{400}} = \frac{10}{20}$ (§. 84.).

§. 91. Numerus irrationalis non mutatur, si per unum vel plures numeros quadratos multiplicetur et simul dividatur. Est enim omnis magnitudo $= a = \frac{a \times 4}{4} = \frac{a \times 4 \times 9}{4 \times 9}$ et sic porro (§. 34. Coroll. 3. Arith. Elem.). Igitur etiam radix quadrata cujusvis numeri quadrati, ergo nec non irrationalis, non mutatur; si in aliquot quadrata perfecta ducatur, et simul per eorumdem radices quadratas dividatur. Est enim $\sqrt{b} = \frac{a\sqrt{b}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 b}}{a}$ (§. 82. Cor. 2.). Et simili modo $\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{10} =$

$$\frac{\sqrt{3 \times 100}}{10} = \frac{\sqrt{3 \times 10000}}{100} = \frac{\sqrt{3 \times 1000000}}{1000}$$

et sic ulterius.

Schol. E numeris irrationalibus radix quadrata non potest exacte extrahi, sed debet per approximationem, id est per fractiones quam proxime investigari.

§. 92. *Problema.* Extrahere radicem quadratam ex dato numero quopiam irrationali.

Resolutio. Numerus irrationalis datus ducatur in tot quadrata quaepiam (praecipue autem numeri 10), ut lubet, ex producto hoc in quantum licet, extrahatur radix quadrata, dividaturque

per factum radicum eorum quadratorum. per quae numerus datus fuerit multiplicatus; quotus erit radix numeri irrationalis dati; ac eo quidem accuratior, in quo plures numerus quadratos irrationalis datus erat ductus. E. g.

Sit extrahenda radix quadrata ex 3. Erit

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3 \times 100 \times 100 \times 100}}{10 \times 10.00} = \frac{\sqrt{3000000}}{1000}.$$

Sed radix approximata ex 3000000 = 1732 etc.

Nam $\sqrt{3,00,00,00} = 1732$

```
1
―――――
200
 27×7
189
―――――
1100
 343×3
1029
―――――
 7100
 3462×2
 6924
―――――
  176 etc.
```

Erit itaque $\sqrt{3} = \frac{1732}{1000}$ $= 1\,\frac{732}{1000}$ fere.

§. 93. *Problema.* Invenire radicem quadratam fractionis irrationalis per approximationem.

Resolutio. Imprimis quaeratur radix quadrata numeratoris, quae exacte ex numeratore rationali, invenitur, et per approximationem, si numerator est irrationalis. Tum quaeratur radix denominatoris, quae simili modo invenitur. Radix numeratoris divisa per radicem denominatoris dabit fractionis datae radicem. E. g. Sit radix

ex $\frac{3}{9}$ extrahenda. Erit $\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1732}{1000}$ etc. :
$3 = \frac{1732}{1000 \times 3} = \frac{1732}{3000}$.

Coroll. Si ex fractione mixta ſit extrahenda radix quadrata; prius illa in fractionem puram eſt convertenda, et tum facile ex pura extrahetur radix ejusmodi.

§. 94. *Problema.* Extrahere radicem quadratam ex numeris mixtis heterogeneis.

Reſolutio. Quantitas mixta multiplicetur per tot quadratos numeros, donec fiat homogenea, vel numerus integer, dividaturque per illos, ſcilicet exprimendo quantitatem in forma fractionis. Tum ex fractione hac extrahatur radix quadrata, et fiat operatio ſecundum datas regulas.

Demonſtratio. Eſt enim $\sqrt{b} = \frac{a\sqrt{b}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 b}}{a}$

$= \frac{\sqrt{a^2c^2b}}{ac} = \frac{\sqrt{a^2c^2d^2b}}{acd}$ (§. 82. Coroll. 2.).

Sed b poteſt quamvis quantitatem repraeſentare; igitur hac ratione numerus mixtus datus immutatus manet. Reliqua per ſe patent. E. g. Sit extrahenda radix ex numero mixto $= 12^\circ\, 1'\, 6''$.

Erit $\sqrt{12^\circ\, 1'\, 6''} = \frac{\sqrt{12^\circ\, 1'\, 6'' \times 4}}{2} =$

$\frac{\sqrt{48^\circ\, 4'\, 24''}}{2} = \frac{\sqrt{48^\circ\, 6''}}{2} = \frac{\sqrt{49^\circ}}{2}$. Sed

$\frac{\sqrt{49^\circ}}{2} = \frac{7^\circ}{2} = 3^\circ\, 3'$ (diviſionis civilis).

Ergo $\sqrt{12^0\ 1'\ 6''} = 3^0\ 3'$.

Vel $\sqrt{26^0\ 4'\ 2''} = \frac{\sqrt{26^0\ 4'\ 2'' \times 36}}{6} =$

$\frac{\sqrt{936^0\ 144'\ 72''}}{6} = \frac{\sqrt{961^0}}{6} = \frac{31^0}{6} =$

$5^0\ 1'$.

Caput IV.

De Extractione radicis cubicae ex complexis expressionibus algebraicis.

§. 95. *Problema.* Extrahere radicem binomiam ex cubo.

Resolutio et Demonstratio. Cum omnis cubus binomii, $(a+b)^3$, constet ex cubo termini primi triplo quadrato cujusvis termini ducto in alterum terminum, et cubo termini secundi, ut patet ex formula generali: $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$, et cum haec expressio aequalis sit huic: $a^3 + b(3a^2 + 3ab + b^2)$; consequenter $a = \sqrt[3]{a^3}$, et $b = \frac{3a^2b + 3ab^2 + b^3}{3a^2 + 3ab + b^2}$; accipiatur itaque, ut $\sqrt[3]{a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3} = (a+b)$ inveniatur:

1) $\sqrt[3]{a^3}$, ut a, prima pars radicis cubicae $(a+b)$ obtineatur, subtrahaturque a^3, cubus inventae

hujus partis primae radicis cubicae a dato cubo $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2) Inhoetur residuum $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dividi per $3a^2$, triplum quadratum jam inventae primae partis radicis cubicae, ut b pars secunda ejusdem radicis obtineatur.

3) Compleatur divisor $3a^2$, addendo illi adhuc $3ab$, triplum productum ambarum partium, et b^2, quadratum partis secundae ejusdem radicis.

4) Denique multiplicetur hicce completus divisor $3a^2 + 3ab + b$ insuper per b, subtrahaturque productum $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, a residuo $3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ut nihil remaneat, si $(a + b)$ radix quaesita sit, *Operatio* ipsa hoc modo repraesentatur:

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b$$

$$\begin{array}{l} -a^3 \\ \hline \left(\begin{array}{l} +3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ +3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ - \quad\quad - \quad\quad - \end{array}\right):(3a^2+3ab+b^2) \\ \hline \quad\quad\quad 0. \end{array}$$

Coroll. 1. Dum jam b, pars altera radicis inventa est; potest operatio commodius continuari, si per b statim $3a^2$ multiplicentur, et productum ex his $3a^2b$ subtrahatur. Tum adhuc subducitur $3ab^2$, et denique b^3.

Operatio modo sequenti instituitur.

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b.$$

$$\begin{array}{l} -a^3 \\ \hline \quad + 3a^2b : 3a^2 \\ \quad - 3a^2b \\ \hline \qquad + 3ab^2 \\ \qquad - 3ab^2 \\ \hline \qquad\quad + b^3 \\ \qquad\quad - b^3 \\ \hline \qquad\quad 0. \end{array}$$

$$\sqrt[3]{a^3 + 3ab^2 - 3a^2b - b^3} = a - b$$

$$\begin{array}{l} -a^3 \\ \hline \quad - 3a^2b : 3a^2 \\ \quad + 3a^2b \\ \hline \qquad + 3ab^2 \\ \qquad - 3ab^2 \\ \hline \qquad\quad - b^3 \\ \qquad\quad + b^3 \\ \hline \qquad\quad 0. \end{array}$$

Coroll. 2. Si praeterea residuum secundum superſit; duas partes radicis cubicae inventas instar unius (nempe pro prima) habere licet, poteſtque jam subtracto earum cubo hocce residuum alterum inhoari per triplum earum quadratum dividi, atque pars tertia radicis cubicae eodem modo ut secunda inveniri, et ita porro. Eſt enim $(a+b+c)^3$, considerando $(a+b)$ ut primam, et

c ut alteram partem binomii $= [(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 b + 3(a+b) c^2 + c^3 =$ etc.

Coroll. 3. Radix cubica extrahitur ex fractione 1) pura; si tam ex numeratore, quam ex denominatore extrahatur; 2) ex mixta; si haec primum in puram convertatur, et tum radix extrahatur ex numeratore et denominatore. Est enim

$$\sqrt[3]{\frac{a^3}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a}{b}. \text{ Et } \sqrt[3]{3a^2 + \frac{3a^3}{8a}} =$$

$$\sqrt[6]{\frac{24a^3 + 3a^3}{8a}} = \sqrt[3]{\frac{27a^3}{8a}} = \frac{3a}{2\sqrt[3]{a}}.$$

Caput V.

De Extractione radicis cubicae e numeris.

§. 96. *Theorema.* Cubi numerorum singulorum sunt:

Radices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729.

Porro est $10^3 = 1000$

$100^3 = 1000000$

$1000^3 = 1000000000$

$10000^3 = 1000000000000$

$100000^3 = 1000000000000000$ etc.

Demonstr. Facile id ex multiplicatione eruitur.

Coroll. 1. Continet itaque radix cubica

1 cyfram, dum cubus 1, 2, vel 3;

2 cyfras, dum cubus 4, 5, vel 6;
3 cyfras, dum cubus 7, 8, vel 9;
4 cyfras, dum cubus 10, 11, vel 12; et
n cyfras, dum cubus $3n - 2$, $3n - 1$, vel $3n$ notas continet.

Coroll. 2. Quodsi ergo numerus datus ab unitate incipiendo in classes, cuivis tres notas assignando, distinguatur; ejus radix cubica tot notarum erit, quot classes numerus datus continuerit; ac classi altiori cubi semper iterum cyfra altior radicis cubicae respondebit.

Coroll. 3. Quodsi jam cubus datus duabus constiterit classibus, ergo ejusdem radix cubica ex decenariis et unitatibus; poterit numerus denaniorum $= a$, et unitatum $= b$ assumi, et inde cubica radix dati cubi eodem modo, ut radix cubica expressionis algebraicae hujus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ inveniri, si

1) ut numerus denariorum inveniatur, accipiatur radix cubica ejus cubi, qui altissimae (finistimae) classi proxime accedit (proxime minoris), ac hic cubus de classe altissima (prima) subducatur;

2) huic residuo primae classis proxime sequens classis adjungatur, et totum per triplum quadratum jam inventorum denariorum radicis cubicae dividi inhoetur, ut etiam numerus unitatum ejusdem obtineatur;

3) divisor hicce eo compleatur, quod illi adhuc triplum productum ex illis denariis et his unitatibus, quadratumque earumdem unitatum addantur;

4) denique productum ex inventis unitatibus radicis cubicae in hunc completum divisorem a dividendo illo subducatur, ut nihil maneat. Ita invenitur

$$\sqrt[3]{1{,}728} = 12$$

$$\begin{array}{l} a^3)\ 1 \\ \hline 728 : 300(3a^2 \\ \qquad\quad 60(3ab \\ \qquad\quad\ 4(b^2 \\ \hline -728 = 364 \times 2(3a^2 + 3ab + b^2)b \\ \hline 0. \end{array}$$

Schol. Inventa jam parte secunda *b*, vel numero unitatum; operatio evadit commodior, si statim triplum productum ex quadrato partis primae in secundam subducitur; tum subtrahitur triplum quadratum partis secundae ductum in primam; et demum cubus partis secundae. Placet itaque nonnullis hoc modo *operare:*

1) distribuunt numerum in classes.

2) Quaerunt radicem classis primae, subducuntque ejus cubum a prima classe.

3) Residuo si quod maneat, adjungunt classem sequentem, dividuntque proximam unam vel duas cyfras classis sequentis per triplum quadratum partis primae (divisorem hunc hoc modo dividendo subscribunt, ut duo loca ad dextram maneant vacua), ut partem secundam detegant.

4) Partem secundam detectam per triplum quadratum partis primae multiplicant, subducunt-

que hoc productum (a ſiniſtris ad dextras operando).

5) Denique ſubtrahunt praeterea triplum quadratum partis ſecundae ductum in primam, et cubum partis ſecundae. Operatio ejusmodi haec erit:

$\sqrt[3]{1,728} = 12.$
a^3)1

728
$3a^2$)3::
$3a^2 b$)6::

12:
$3ab^2$)12:
— :

8
b^3) 8
—

0.

$\sqrt[3]{175,616} = 56.$
a^3)125
—

50616
$3a^2$) 75::
$3a^2 b$)—450::

561:
$3ab^2$)—540:

216
b^3)—216

0.

Ratio, quare proxima una vel duae cyfrae claſſis ſequentis dividantur, et etiam a ſiniſtris ad dextram ſubtrahatur, eſt, quia pars prima radicis non denotat unitates, ſed in radice binomia, denarios, in trinomia, centenarios, et ita porro. Et quamvis hic zeri omittantur, cyfrae tamen debite ſibi ſubſcribendae, et ab invicem ſubducendae ſunt. Operatio ita deberet repraeſentari;

$$\sqrt[3]{1{,}728} = 12 = 10 + 2$$

a^3) — 1000

728 : 300 = 2

$3a^2 b$) — 600

128

$3ab^2$) — 120

8

b^3) — 8

0.

Coroll. 4. Quodſi datus cubus tribus vel pluribus claſſibus conſtet; ſecundum primam methodum ex duabus altiſſimis claſſibus duae altiſſimae cyfrae radicis cubicae, proximeque ſequentes inferiores cyfrae radicis cubicae una poſt alteram inveniuntur, ſi jam inventae ſemper inſtar primae partis (a) radicis cubicae habeantur, et quia earum cubus jam ſubtractus eſt, ſtatim ſumma ex reſiduo claſſium altiorum et ex proxime inferiore claſſe inhoetur dividi, et ceterum ut antea procedatur.

Ita erit;

$\sqrt[3]{1,367,631} = 111$

$a^3)$ — 1

367 : 3 ($3a^2 = 1$

$3a^2b)$ 3 : :

6 :

$3ab^2)$ 3 :

37

$b^3)$ — 1

36631 : 363 ($3a^2 = 1$

$3a^2b)$ — 363 : : (*

33 :

$3ab^2)$ — 33 :

1

$b^3)$ — 1

0.

*) Nunc ambae partes = 11 = 100 + 10 habentur inſtar unius, altera pars radicis quaeritur.

Vel ita: $\sqrt[3]{1,367,631} = 111$

$$
\begin{array}{rrl}
a^3) & -1 & \vdots \\
\hline
 & 367 & \vdots \\
3a^2) & 3:: & \vdots \\
 & 1:: & \vdots \\
3ab^2) & -3:: & \vdots \\
\hline
 & 6; & \vdots \\
3ab^2) & -3: & \vdots \\
\hline
 & 37 & \vdots \\
b^3) & -1 & \vdots \\
\hline
 & 36631 & \\
\text{iterum } 3a^2) & 363:: & \\
 & 1:: & \\
3a^2 b) & -363:: & \\
\hline
 & 33: & \\
3ab^2) & -33: & \\
\hline
 & 1 & \\
b^3) & -1 & \\
\hline
 & 0. &
\end{array}
$$

§. 97. Radicem cubicam ex numero irrationali extrahere.

Resolutio et demonstratio. Quoniam $\sqrt[3]{7} = \frac{a\sqrt[3]{7}}{a} = \frac{\sqrt[3]{a^3 \times 7}}{a} = \frac{\sqrt[3]{a^3 b^3 \times 7}}{ab}$, et igitur etiam $\frac{10\sqrt[3]{7}}{10} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 10^3}}{10} = \frac{\sqrt[3]{7 \times 1000}}{10} =$

$$\frac{10\sqrt[3]{7.1000}}{10\times10}=\frac{\sqrt[3]{7.1000\times1000}}{10\times10}=\sqrt[3]{7000000},$$

et ita porro; invenitur radix cubica ex numero irrationali: si numerus datus aliquoties in cubum denarii ducatur (quod semel fit, si numero adjungitur una classis trium zerorum etc.), tum ex hoc producto radix cubica per approximationem extrahatnr, et demum haec radix per productum ex tot decenariis, in quot cubos decenarii numerus datus fuerit ductus, dividatur. Ita erit

$$\sqrt[3]{7}=\frac{\sqrt[3]{7000000}}{100}=\frac{197}{100}\text{ etc.}=1\times\frac{97}{100}$$

fere.

Coroll. 1. Radix cubica numeri irrationalis dati extrahenda eo propius verae accedet, quo plures cubi decenarii in illum ducti fuerint.

Coroll. 2. Aequali modo cubica radix e numeris mixtis heterogeneis extrahitur; si nempe numerus mixtus datus per alium voluntarium perfectum cubum multiplicetur, ex producto radix cubica extrahatur, et haec radix rursus per radicem cubicam illius cubi perfecti dividatur. Est enim

$$\sqrt[3]{b}=\frac{\sqrt[3]{a^3 b}}{a}=\frac{a\sqrt[3]{b}}{a};$$ hinc etiam

$$\sqrt[3]{42^{\circ}5'3''}=\frac{\sqrt[3]{42^{\circ}5'3''\times8}}{2}=\frac{\sqrt[3]{336^{\circ}40'24''}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{343^{\circ}}}{2}=\frac{7^{\circ}}{2}=3\tfrac{1}{2}^{\circ}=3^{\circ}3'.$$

Coroll. 2. Quodsi numerus mixtus prima multiplicatione per cubum aliquem perfectum non fieret numerus integer; multiplicatio repetitur, tam diu donec evadat numerus integer. Est enim

$$\sqrt[3]{b}=\frac{\sqrt[3]{b\times a^3\times c^3\times d^3}}{a,\ c.\ d,}$$

§. 98. Extrahere radicem cubicam ex fractione numerica.

Resolutio et demonstratio. 1) Si fractio sit pura: extrahatur radix cubica ex numeratore et denominatore. Est enim $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$.

2.) Si fractionis numerator, vel denominator, vel ambo sint numeri irrationales; procedatur secundum leges §. 97. et inveniatur radix eorum, si non vera, saltim approximata; tum dividatur radix numeratoris per radicem denominatoris. Est enim $\sqrt{\frac{a^3}{b}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$; et $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=$ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$.

3.) Si fractio fuerit mixta; convertatur primum in puram, et tunc quaeratur hujus radix cubica. Est enim $\sqrt[3]{\left(3+\frac{3}{8}\right)}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

$=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$. Et $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{27}{8}$.

Sectio Tertia.

De Calculis in fractionibus Decimalibus, et Sexagesimalibus; item in numeris mixtis heterogeneis.

Caput I.

De fractionibus Decimalibus.

§. 99. In Decadico systemate adoptato numerorum valores cyfrarum a dextris ad sinistras numerando (in quovis loco decuplo) in decuplum crescunt; et consequenter decrescunt a sinistris ad dextras iterum in quovis loco in decuplum. Nempe valor cujusvis cyfrae in quovis loco semper 10*ma* pars ejus valoris est, quem eadem ipsa in proxime altiori loco obtinet (per defin.).

Ita in hoc systemate valores cyfrarum numeri $= 4444$, sunt hi: $4 = \frac{40}{10}$; $40 = \frac{400}{10}$; $400 = \frac{4000}{10}$; et $4000 = \frac{40000}{10}$; et ita porro, quivis quaternarius dextram versus tantum *decima* pars valoris est, quem quaternarius in proxime altiori loco habet.

Coroll. 1. Quodsi igitur locus unitatum de reliquis eo distinquatur, ut illi virgula, vel comma postponatur, cyfraeque adhuc ulterius ad dextram continuentur, ut e. g. in hoc numero 4,444; invenietur valor cujusvis loci post unitatem, si valor proxime altioris semper iterum per 10 (decem) dividatur. Cum autem cyfra

ante virgulam vel comma, ſecundum ſuppoſitionem unitates denotet; prima cyfra poſt unitatem deſignabit partes *decimas*, ſecunda *centeſimas*, tertia *milleſimas*; et quarta tantum *decies milleſimas* (decimilleſimas), quinta *centimilleſimas* ejusdem. Itaque erit

$$4,444 = 4 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000}.$$
$$25,3678 = 25 + \frac{3}{10} + \frac{6}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{8}{10000}.$$
$$301,333 = 301 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}.$$

Coroll. 2. Cyfrae ergo poſt locum unitatum poſitae, tantum aliquotas qartes unitatis, *decimales* (zehnte Theile) in ſyſtemate decadico denotare poſſunt. At cum partes totius nihil aliud ſint, ac fractiones, denotabunt igitur cyfrae poſt locum unitatum poſitae fractiones. Id genus numeri, qui enaſcuntur, ſi integra ab unitate inhoando a dextris praeponantur, dicuntur *fractiones decimales*, vel *decimales numeri*, vel *decimalia*. Quando nulla integra exprimenda ſunt, locus unitatum zero deſignari debet.

§. 100. In decadica ratione cyfrae duplicem habent valorem, unum figurae (notae) ſuae, alterumque ſui loci, ſemper a loco unitatum incipiendo.

Zerus in ſe nullum habet valorem. Verum hic mutat valorem caeterarum cyfrarum ſignificantium ſemper, ſed modo tunc, ſi locum earum mutet.

Coroll. 1. Zerus igitur ante integros, et poſt decimales numeros locatus nullum valorem habet, quia tum hi, tum illi ſemper eundem retinent locum, etſi illis 0 praeſcribatur, et his zeri

postscribantur, quotcunque lubeat. Ita 3,4 semper manet = 03,400 = 003,4000 = etc.

Coroll. 2. Quodsi autem 0 post integros numeros scribatur; quaevis talis cyfra significans in altiorem locum profertur, et igitur multiplicatur per 10. Sic est: $334 \times 10 =$ ipsi 3340. Et si post unitatem 0 ante cyfras decimales scribatur; quaevis earum in locum inferiorem defertur, dividiturque ergo per 10. Ita $(0,4):10 =$ ipsi 0,04; $(0,6):100 = 0,006$.

Coroll. 3. Quodsi ergo quaevis cyfra numeri cujuspiam uno, duobus, tribus, aut quatuor locis a dextris sinistram versus promoveatur; multiplicatur numerus per 10, 100, 1000, aut 10000: et si quaevis cyfra numeri cujuspiam uno, duobus, tribus, aut quatuor locis removeatur; numerus per 10, 100, 1000 aut 10000 dividitur.

Coroll. 4. Omnis itaque numerus multiplicatur, vel dividitur per 10, 100, 1000, vel 10000; si signum unitatum uno, duobus, tribus, aut quatuor locis pro primo casu ulterius ad dextras, et pro casu secundo ulterius ad sinistras scribatur.

Ita est $33,27 \times 10 = 332,7$
$33,27 \times 100 = 3327,0$
$33,2713 \times 1000 = 33271 3,000$ etc.

Et

$33,27 : 10 = 3,327$
$33,27 : 100 = 0,3027$
$233,2713 : 1000 = 2,332713$
$233,27 : 10000 = 0,23327.$

§. 101. *Theorema.* Quivis numerus decadice expressus, exprimitur per potentiam numeri 10 (denarii); si in illo valor cyfrarum tum figurae tum localis designetur (restituatur).

Demonstr. Est enim E. g. $333 = 3 \times 100 + 3 \times 10 + 3 \times 1 = 3 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 3 \times 10^0 = 3 (10^2 + 10^1 + 10^0)$. Et $543 = 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. Item $34, 34 = 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times \frac{1}{10} + \frac{4}{100} = 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$. Item $0, 534 = 0, \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} = 0 + 5 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}$; et sic de reliquis.

Coroll. Fractio decimalis transformatur in fractiones vulgares; si decadicus valor illius exprimatur per potentias positivas, decenarii, vel quod idem est, si denominatores fractionum decimalium reapse scribantur, et integris addantur. Est enim $3, 5 = 3 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} = \frac{3}{1} + \frac{5}{10} = \frac{30}{10} + \frac{5}{10} = \frac{35}{10}$. Et $0, 5 = 5 \times 10^{-1} = \frac{5}{10}$. Item $34, 55 = 34 \times 10^0 + 5 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = 34 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100}$.

§. 102. *Theorema.* Fractio quaevis vulgaris convertitur in decimalem, vel valor ejusdem exprimitur decadice; si illius numeratori quotcunque zeri addantur, et tum per denominatorem dividatur, donec vel divisio peragatur, vel non sit necesse ulterius approximationem ducere.

Demonstr. Nam numerus non mutatur, si post illum zeri scribuntur. Est enim $\frac{3}{4} = \frac{3,00000}{4}$

$= (3{,}000000$ etc.$) : 4$. Et facta divisione erit

$\frac{3{,}0000 \text{ etc.}}{4} = 0{,}75$.

Item $\frac{1}{3} = (1{,}000000$etc.$):3 = 0{,}33333333$etc.

Item $\frac{5}{8} = 5{,}00 : 8 = 0{,}625$.

§. 103. *Theorema.* Fractio decimalis utcunque magna convertitur in unam vulgarem; si tota assumatur instar numeratoris, et decadica potentia ultimae cyfrae decimalis fractionis (vel 1 cum tot zeris, quot unitates exponens ultimae cyfrae ut potentiae habet) instar denominatoris pro fractione ordinari. Ut $3{,}5 = \frac{35}{10}$; $3{,}53 = \frac{353}{100}$; $3{,}555 = \frac{3555}{1000}$, et ita porro.

Demonstr. Fractio decimalis convertitur in vulgares, si exprimatur per potentias decenarii, vel si denominatores decimalium actu scribantur (exprimendo nempe exponentem positive). Sed numerus (nec integer nec fractus) non mutatur, cum per eundem numerum multiplicatur et dividitur, vel si aequalis numerus zerorum in numeratore et denominatore scribitur. Hoc pacto autem facile intelligitur, fractiones ejusdem denominatoris tunc addi, si numeratores in summam colligantur, et summa haec per communem denominatorem dividatur. At accipiendo fractionem decimalem pro numeratore novae fractionis, nihil aliud fit, quam quod numera-

tores fractionum ejusdem denominatoris addantur, quia decimales summam numeratorum efficiunt, et denominator ultimae cyfrae fractionis decimalis nihil aliud est, quam communis denominator fractionum addendarum, quia appositis zeris in numeratore et denominatore nulla fractio mutatur. Ergo fractio decimalis rite hoc modo in vulgarem convertitur. Ita erit:

$$34,34 = \frac{3434}{100} \,.\; 0,52 = 5 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} = \frac{5}{10} + \frac{2}{100} = \frac{50}{100} + \frac{2}{100} = \frac{52}{100}.$$

Item 33,333

$$= \frac{33000}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{33333}{1000}.$$

Item $0,0034 = \frac{34}{10000}$; nam $\frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$

$$= \frac{34}{10000},$$ Et id genus plura.

Coroll. 1. Fractiones quaecunque, quarum denominatores 10 vel potentia aliqua de 10, vel 1 cum aliquot zeris est, nihil aliud sunt, quam decimales; possuntque ad communem denominatorem reduci addendo in numeratore et denominatore tot zeros, quot desunt, donec denominator cujusvis earum aequalem numerum zerorum habeat. Est enim E. g. $\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000}$

$$= 3 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 3 \times 10^{-3} = 0,353,$$

$$\text{et etiam} = \frac{300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{3}{1000} = \frac{353}{1000}.$$

$$\text{Item } \frac{3}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{5}{10000} + 0{,}3895.$$

Coroll. 2. Ergo fractiones iſtiusmodi poſſunt in decimalem converti, vel addi, ſi earum deno- minatores decadice ſcribantur, ſecundum po- tentiam denarii,

§. 104. *Problema.* Fractiones decimales addere, vel ſubtrahere.

Reſolutio. Fractiones datae ita ſub ſe invicem ſcribantur, ut homogenea infra homogenea lo- centur (decimas decimis, centeſimas centeſimis etc. ſubſcribendo); ſi in una plures ſint decima- les notae, quam in altera, fiat aequalis numerus notarum adjectis in fine zeris. Tum fiat ad- ditio, vel ſubtractio (ſubducendo minorem a majori), ut in numeris integris; ſumma, vel differentia inventa dabit ſummam, vel differen- tiam fractionum. E. g. Sint addenda 3, 56; et 15, 322, et 39, 53; ſcribatur:

3, 560	Item:	53, 34070
15, 322		43, 56897
39, 530		96, 90967.
58, 412		

Et ſit Minuendus	=	53, 48234
Subtrahendus	=	49, 34028.
Erit differentia	=	4, 14206.

Demonstr. Adjectis zeris in fine fractiones decimales aequalem potentiam denominatoris, igitur aequales denominatores obtinent, et itaque ut fractiones ejusdem denominatoris supputari possunt, quarum numeratores duntaxat adduntur, vel subtrahuntur, et denominator immutatus manet (§. 47. et 60. §.). Ergo rite fit additio, vel subtractio fractionum decimalium hoc modo. Ita in primo exemplo est:

$$3,56 = \frac{3560}{1000} = \frac{3560}{10^3}$$

$$15,322 = \frac{15322}{1000} = \frac{15322}{10^3}$$

$$39,53 = \frac{39530}{1000} = \frac{39530}{10^3}.$$ Haec autem

dant $\frac{3560}{10^3} + \frac{15322}{10^3} + \frac{39530}{10^3} = \frac{58412}{10^3} = \frac{58412}{1000} = 58,412.$

§. 105. *Problema.* Fractiones decimales multiplicare.

Resolutio. 1) Scribantur ut integra sine distinctione decimalium, ducaturque multiplicator in multiplicandum. 2) Tot in facto a dextra sinistram versus rescindantur notae pro decimalibus, quot in utroque factore notae decimales sunt.

E. g. Sit multiplicand. $=$ 3,44
multiplicat. $=$ 3,2

$$\begin{array}{r} 3{,}44 \\ 3{,}2 \\ \hline 688 \\ 1032 \\ \hline 11{,}008 \end{array}$$

Erit 11,008 $=$ Producto $=(3{,}44)\times(3{,}2)$. Item 0,343 multiplicand.
3,24 multiplicator.

$$\begin{array}{r} 0{,}343 \\ 3{,}24 \\ \hline 1029\;\! \\ \hline \end{array}$$

1029
686
1372
1,45089 $=$ producto.

Demonstr. Sit unus factor $=\frac{a}{10^m}$, et alter $=\frac{b}{10^n}$; erit $\frac{a}{10^m}\times\frac{b}{10^n}=\frac{ab}{10^{m+n}}$ (§. 71. et §. 52,). Item $\frac{a^p}{10^m}\times\frac{b^q}{10^n}=\frac{a^p b^q}{10^{m+n}}$. Fractiones decimales multiplicandae nihil aliud sunt, quam ejusmodi quantitates divisae per potentiam aliquam decenarii. Est enim $3{,}44=\frac{344}{100}=\frac{344}{10^2}$, et $3{,}2=\frac{32}{10}=\frac{32}{10^1}$; et igitur $\frac{344}{10^2}\times\frac{32}{10^1}=\frac{344\times 32}{10^{2+1}}=\frac{11008}{10^3}=\frac{11008}{1000}=11+\frac{8}{1000}=11{,}008$. Quemadmodum ergo in poten-

tiis proceditur, ita et in decimalibus procedendum erit. Sed in potentiis exponentes factorum adduntur; igitur etiam hic addendi erunt. Verum additi addendi exponentes decenarii in denominatore designant summam notarum decimalium utriusque factoris, ergo tot habebit productum notas decimales, quot habet uterque factor.

Coroll. 1. Si ergo fractio decimalis per numerum integrum multiplicari debeat; in facto (quod itidem communi multiplicandi methodo obtinebitur) non nisi tot notae dexteriores commate separandae erunt, quot notas decimales fractio illa habuerit. E. g.

$3,555 \times 8 = 28,440$. Item $15,48 \times 1000 = 15480,00$. Nam $\frac{1548}{100} \times 1000 = \frac{1548000}{100}$ $= 15480,00$ (Vide §. 100. Cor. 3. et 4.).

Coroll. 2. Si fractio decimalis per fractionem vulgarem multiplicari debeat, primum haec in decimalem, vel potius illa in vulgarem est convertenda, et tum invicem multiplicantur. E. g. $3,5 \times \frac{3}{4} = \frac{35}{10} \times \frac{3}{4} = \frac{35 \times 3}{10 \times 4}$. Vel $= 35 \times 0,75 = \frac{35 \times 75}{1000} = \frac{35}{10} \times \frac{75}{100} = \frac{35 \times 75}{10^3}$

Coroll. 3. Si in facto pauciores sunt notae, quam in utroque factore simul, sinistram versus tot zeri adjici debent, ut numerum notarum decimalium exaequent, et pro integris itidem zerus ponendus est. Est enim E. g. (3,56)

$\times (0{,}002) = \frac{356}{100} \times \frac{2}{1000} = \frac{356 \times 2}{100000} = \frac{712}{100000} = 0{,}00712.$

Item $0{,}002 \times 0{,}03 \times \frac{2 \times 3}{100000} = \frac{6}{100000} = 0{,}00006.$

§. 106. *Problema.* Fractiones decimales dividere.

Resolutio. 1) Scribantur cyfrae significantes divisoris et dividendi sine distinctione decimalium, et fiat divisio more integrorum; at in quoto tot notae pro decimalibus abscindantur, quot notis decimalibus dividendus superat divisorem.

2) Si in divisore plures occurrant notae decimales, quam in dividendo, vel si ex divisione quodpiam residuum maneat; addantur ut notae sequentes et dividendo et residuo unus vel plures zeri, quo pacto dividendi valor non mutatur, atque ita continuetur divisio.

Demonstratio. Sit dividendus $\frac{a}{10^m}$ et $\frac{b}{10^n}$ sit divisor; erit $\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n} = \frac{a \times 10^n}{b \times 10^m} = \frac{a}{b} \times 10^n \times 10^{-m}$ (§. 55. et §. 75. Coroll.) $= \frac{a}{b} \times 10^{n-m} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{10^m \times 10^{-n}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{10^{m-n}}$ (§. 71.).

Sed $\frac{a}{b} \times \frac{1}{10^{m-n}} = \frac{a}{b} : \frac{10^{m-n}}{1}$ (§. 55.) $=$

$\frac{a}{b} : 10^{m-n} = (a:b) : 10^{m-n}$. Ergo $\frac{a}{10^m} : \frac{b}{10^n}$

$= (a:b) : 10^{m-n}$.

Vel positis quibuscunque cyfris vice literarum *a* et *b*, ut $(14,224) : 3,22 = \frac{14224}{10^3} : \frac{322}{10^2} =$

$$\frac{14224 \times 10^2}{322 \times 10^3} = \frac{14224}{322} \times \frac{1}{10^{3-2}} = \frac{14224}{322} : 10^{3-2}.$$

Hoc verbis expressum significat: quotus duarum fractionum, quarum denominatores aliquam potentiam decenarii repraesentant (10 cum exponente), aequalis est illi, qui obtinetur, si quantitas per quantitatem, vel numerus per numerum dividatur, et quotus enascens praeterea dividatur per 10 elevatum ad potentiam aequalem ejus exponenti dividendi minus exponente divisoris. Atqui fractiones decimales sunt ejusmodi fractiones, ergo rite dividuntur, si more integrorum dividantur, quippe dividendus per divisorem. At dividere per potentiam praedictam decenarii nihil aliud est, quam abscindere notas a dextris sinistram versus tot, quot notis dividendus superat divisorem (§. 100. Cor.); ergo etiam rite hoc modo invenitur quotus verus fractionum decimalium datarum.

Si dividendo zeri adduntur, ejus valor non

mutatur, et residuo zeri additi ita spectantur, ac si jam ab initio adjecti fuissent dividendo.

Exempla 1) $10{,}5076 : 2{,}41 = \frac{105076}{10000} : \frac{241}{100}$

$= \frac{105076 \times 100}{241 \times 10000} = \frac{105076}{241} \times \frac{10^2}{10^4} =$

$\frac{105076}{241} \times \frac{1}{10^{4-2}} = \frac{105076}{241} \times \frac{1}{10^2} =$

$\frac{105076}{241} : 10^2 = 436 : 100 = 4{,}36.$

2) $0{,}25 : 0{,}2 = \frac{25}{100} : \frac{2}{10} = \frac{25.10}{2.100} = \frac{25}{2} \times$

$\frac{1}{10} = \frac{25}{2} : 10 = 12{,}5 : 10 = 1{,}25.$

3) $0{,}045 : 0{,}04 = \frac{45}{1000} : \frac{4}{100} = \frac{45}{4} : (10^{3-2}) =$

$\frac{45}{4} : 10 = 11{,}25 : 10 = 1{,}125$ (§. 100. Cor. 4.).

Coroll. 1. Quodsi fractio decimalis dividi debeat per numerum integrum, vel integer numerus per fractionem decimalem; primum numerus integer in fractionem decimalem converti, et tum divisio institui debet. Est enim $5 : 0{,}5 = \frac{50}{10} : \frac{5}{10} = \frac{50 \times 10}{5 \times 10} = \frac{50}{5} : 10^0 = 10.$

Et $0{,}5 : 5 = \frac{5}{10^1} : \frac{50}{10^1} = \frac{5}{50} : 10^0 = 0{,}1.$

Coroll. 2. Quodsi fractio decimalis per fractionem vulgarem, vel vicissim, fractio vulgaris per decimalem dividi debeat; primum vulgaris in decimalem, vel decimalis in vulgarem converti, et tum divisio institui debet. Ita est

$$0,5 : \frac{3}{4} = 0,5 : 0,75 = \frac{5}{10} : \frac{75}{100} = \frac{5 \cdot 10^2}{75 \cdot 10^1}$$

$$= \frac{5}{75} : 10^{-1} = \frac{500}{750} = \frac{50}{75}.$$

Et $\frac{3}{4} : 0,5 = \frac{3}{4} : \frac{5}{10} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = 1,5.$

Corollt. 3. Perspicuum est, in additione, subtractione, multiplicatione ac divisione in fractionibus decimalibus rationem quoque signorum haberi, et regulas hactenus in Algebra datas observari debere.

Exempla.

Additionis.

3,567	— 30,56	— 3, 5
— 2,363	+ 20,38	— 2, 8
1,204	— 10,18	— 6, 3

Subtractionis.

39, 328	— 0, 324	— 32, 567
30, 248	— 0, 002	+ 30, 432
—	+	—
9, 080	— 0, 322	—62, 999.

0, 00036	— 0, 0367 minuendus
0, 23403	— 0, 0434 subtrahendus
—	+
—0, 23367	+ 0, 0067 = differentiae.

Multiplicationis.

$0,5 \times (-3,2) = -1,60.$
$-3,2 \times (-0,3) = +0,96,$
$-0,03 \times 0,03 = -0,0009.$

Divisionis.

$$3,43 : (-0,2) = -\frac{343}{2} : 10 = -171,5 : 10$$
$$= -17,15.$$

$$-50,38 : -2,2 = +\frac{5038}{22} : 10 = 22,8.$$

$$-56,034 : 0,00040 = -\frac{56034}{4} : 1 = -$$
$$140085, \text{ etc,}$$

§. 107. *Problema.* Extrahere radicem quadratam vel cubicam ex fractione decimali.

Resolutio. Fiat extractio radicis et quadratae et cubicae, ut in numeris integris, et ad residuum, si aliquod maneat ponatur classis sequens duorum zerorum in quadratae et trium zerorum in cubicae radicis extractione, continueturque extractio per approximationem. E. g. Sit extrahenda radix quadrata ex 12, 25; erit

$$\sqrt{(12,25)} = 3,5$$
$$a^2)\ 9$$
$$325$$
$$2a)\quad 65 \times 5$$
$$325\ (2a+b)b$$
$$0.$$

Et $\sqrt{(8,34} = 2,887$ etc.

4

434

48×8

384

5000

568×8

4544

45600

5767×7

40369

5231 etc.

Sit extrahenda radix cubica ex 42, 875; erit

$\sqrt[3]{(42,875)} = 3,5$

a^3)27

15875

$3a^2$) 27::

5::

$3a^2b$) 135::

237:

$3ab^2$) 225:

125

b^3) 125

o.

Demonſtratio. Fractiones decimales nihil aliud ſunt, quam ſeries continuata numerorum naturalium in ſyſtemate decadico, decreſcens, et quemadmodum in numeris integris, ita et in decimalibus quaevis claſſis reſiduo altioris claſſis

addita ſemper iterum inferiorem cyfram pro radice dat; hinc in decimalibus, et in numeris, qui ex integris et decimalibus conſtant, nihil ſingularis obſervandum venit, quam, ut claſſes ab unitate incipiendo etiam ad dextram continuentur, et ſicut in integris opus peragatur.

Schol. Si pro approximanda radice numero claſſis ſequens duorum zerorum addatur, obtinentur, decimae, tum addita ſequenti claſſe centeſimae, et ita porro in radice quadrata; in cubica adduntur tres zeri ut prima claſſis ſequens, et obtinentur decimae, et ita porro. Ratio hujus adjunctionis zerorum inſtar claſſis ſequentis conſiſtit in eadem natura fractionum decimalium cum numeris integris, qua ergo nihil aliud fit, quam continuatio computationis. Ita $\sqrt{3} = \sqrt{3{,}00{,}00{,}00}$. Et

$\sqrt{9,34} = 3{,}099$ etc.

9
―――
34
60×0
00
―――
3400
309×9
2781
―――
71900
6189×9
55701
―――
6199 etc.

Caput II.

De fractionibus Sexagesimalibus.

§. 108. *Numeri Sexagesimales* sunt partes aliquotae totius, quod in (60) aequales partes distributum habetur, subserviuntque exprimendis subdivisionibus unius horae temporis, ac gradus circuli, cum moris sit dividere 1 horam et 1 gradum in 60 minuta prima, 1 minutum primum (utriusque) in 60 minuta secunda, 1 minutum secundum in 60 minuta tertia, et ita porro.

Est ergo 1 minutum primum sexagesima pars $= \frac{1}{60}$ unius horae vel gradus;

1 minutum secundum sexagesima pars $= \frac{1}{60}$ unius minuti primi;

1 minutum tertium sexagesima pars $= \frac{1}{60}$ unius minuti secundi; igitur

1 minutum primum $= \frac{1}{60}$ horae
1 secundum $= \frac{1}{60} : 60 = \frac{1}{3600}$
1 tertium $= \frac{1}{3600} : 60 = \frac{1}{216000}$. Et itaque
1 hora vel 1 gradus $= 60$ minutis
$= 60 \times 60 = 3600$ secundis
$= 60 \times 60 \times 60 = 216000$ tert.

Subdivisiones ejusmodi 1 horae vel 1 gradus, sive minuta, secunda, et tertia possunt per exponentem potentiae 60 exprimi; est enim

$$1 \text{ minutum} = \frac{1}{60} \text{ horae}$$

$$1 \text{ secundum} = \frac{1}{3600} = \frac{1}{60^2} \text{ horae}$$

$$1 \text{ tertium} = \frac{1}{216000} = \frac{1}{60^3} \text{ horae.}$$

Ex his jam facile intelligitur, quomodo ſcribendus foret datus numerus 3 horarum, 24 minutorum, 40 ſecundum, et 52 tertiorum. Nimirum modo vulgari:

$$3 + \frac{24}{60} + \frac{40}{3600} + \frac{52}{216000};$$ et modo jam commodiori:

$$3 + \frac{24}{60} + \frac{40}{60^2} + \frac{52}{60^3}.$$

Sed cum quilibet numerus (factor) ex denominatore in numeratorem cum mutato ſigno exponentis ſui transferri queat (§. 75. Cor.), erit etiam datus $= 3 \times 60^0 + 24 \times 60^{-1} + 40 \times 60^{-2} + 52 \times 60^{-3}$.

Geometrae in operationibus cum ejusmodi numeris denominatores, vel factores negativi exponentis prorſus omittere, et ſolum exponentem referendum ſexageſinarii (60) vel per numeros romanos (virgulas) vel more exponentium deſignare ſolent. Hinc numerum datum ita ſcripturi $3^0\ 24'\ 40''\ 52'''$. Vel $3^h\ 24^1\ 40^2\ 52^3$; id eſt 3 hor. $24^{-1}\ 40^{-2}\ 52^{-3}$.

Sunt ergo numeri ſexageſimales, fractiones, quarum denominatores ſunt 60 vel potentia aliqua (60) ſexageſinarii, cujusmodi denominatores autem actu non ſcribuntur, verum more exponentium deſignantur. Erit ergo numerus $13^0\ 24'\ 50''\ 36'''$ $=$ 13 grad. + 24 minut. + 50 ſecund. + 36 tertiis $= 13 + \frac{24}{60} + \frac{50}{60^2} + \frac{36}{60^3} = 13 \times 60^0 + 24 \times 60^{-1} + 50 \times 60^{-2} + 36 \times 60^{-3}$.

§. 109. *Problema.* Numeros sexagesimales addere.

Resolutio. Homogenea sub homogeneis locentur, et addantur, a minima specie incipiendo, summaeque singulae, si opus ad majores species reducantur (dividendo per 60), residuum subscribatur et quotus speciei majori addatur.

E. g. Sint addenda: 14 hor. 17 minut. 18 secund. 10 tertia, et 20 hor. 24 minut. 28 sec. 54 tert.

Erit: 14° 17′ 18″ 10‴
20. 24. 28 54

34. 41. 46. 64 = 34° 41′ 47″ 04‴ reductis.

§. 110. *Problema.* Numeros sexagesimales subtrahere.

Resolutio. Homogenea homogeneis subscribantur, et subtrahantur, incipiendo a minimo ordine. Si unus ordo ab altero subduci nequeat, a proximo sumatur unitas, atque in minorem resolvatur, et minuendo addatur. E. g.

Sit 3ʰ 40′ 59″ 40‴ minuendus
1 50 30 50 subtrahendus.

Erit 1ʰ 50′ 28″ 50‴ = differentiae.

	dies	24	60	60	60	
Item sit	30	20°	24′	39″	49‴	minuendus
	20	21	30	40	50	subtrahend.
	dies 9	22°	53′	58″	59‴	= differentiae.

§. 111. *Problema.* Fractiones fexagefimales per numerum integrum multiplicare.

Refolutio. Singulae fpecies a minima incipiendo multiplicentur, et facta ad majores fpecies reducantur (dividendo per 60), proximisque addantur. E. g. Sint multiplicanda ($3^{\circ}\ 21'\ 30''\ 32'''$) per 3. Erit $3^{\circ}\ 21'\ 30''\ 32'''$

3

9. 63. 90. 96, feu $= 10^{\circ}\ 04'\ 31''\ 36'''$.

§. 112. Fractiones fexagefimales per decimales, vel vulgares multiplicare.

Refolutio. In id genus multiplicatione optime agitur, fi primum omnia ad minimam fpeciem reducantur, et tum multiplicatio inftituatur. Sub fine divifio pro ratione et neceffitate problematis vel decimalem, vel fexagefimalem valorem (expreffionem) reftaurare poterit. E. g. Sit ($3^{\circ}\ 5'\ 6''\ 12'''$) $\times$ 3, 2. Erit $3^{\circ}\ 5'\ 6''\ 12'''$ $= 216000 \times 3 + 3600 \times 5 + 60 \times 6 + 12 =$ $648000 + 18000 + 360 + 12 = 666372'''$. Hinc $666372 \times 3{,}2 = 2132390{,}4''' =$ $\frac{2132390{,}4^{\circ}}{216000}$, etc.

Quodfi hoc productum in fractionibus fexagefimalibus educendum fit; fucceffive per 60 dividi, (ad majores fpecies reduci) debet, ut 1*mo* minuta fecunda, ex his prima, et ex his integra, id eft horae vel gradus eruantur.

Eodem quoque modo operandum, fi alter factor effet fractio vulgaris. Ut $3^{\circ}\ 5'\ 6''\ 12'''$ $\times \frac{3}{4} = 2132390{,}4''' \times \frac{3}{4}$, etc.

§. 113. *Problema.* Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.

Resolutio. Ordines (similes species) sibi subscribantur, multiplicenturque cyfrae quaevis exacte, atque producta aequalium exponentium (qui addi debent) secundum leges decadices sub se invicem locentur. Denique omnes similes ordines in unam summam colligantur, reducanturque ad proxime majores, residuum scribatur, et quotus speciei majori addatur. E. g. Sint multiplicanda (4° $22'$ $38''$) per (2°. $7'$. $18''$). Stabit Operatio modo sequenti:.

$$\begin{array}{rrrrr} & & 4^{\circ} & 22^{1} & 38^{2} \\ & & 2^{\circ} & 7^{1} & 18^{2} \\ \hline & & 72''. & 176'''. & 304'''' \\ & & & 22 & 38 \\ & 28'. & 154''. & 266''' & \\ 8^{\circ}. & 44'. & 76'' & & \\ \hline \end{array}$$

$8^{\circ}.72'.302^{2}.662^{3}.684^{4}$. seu reductis ad m. sp. $9^{\circ},17'.13''. \quad 13^{3}.24^{4}$.

Demonstratio. $4^{\circ}\ 22'\ 38^{2} \times 2^{\circ}\ 7^{1}\ 18^{2}$ aequale $=$ $4\times60^{\circ}+22\times60^{1}+38\times60^{2}$ factor unus; $2\times60^{\circ}+7\times60^{1}+18\times60^{2}$, alter; et singulos terminos multiplicando, obtinetur productum

$$=(4\times2)60^{\circ}+(22\times7)60^{1}+(38\times2)60^{2}$$
$$+(4\times7)60^{1}+(7\times22)60^{2}+(7\times38)60^{3}$$
$$+(18\times4)60^{2}+(18\times22)60^{3}+(18+38)60^{4}$$

$=8(60^{\circ})+(44+28)60^{1}+(76+154+72)60^{2}+(266+396)60^{3}+684(60^{4})$, seu additis $=$ $8(60^{\circ})+(72)60^{1}+(302)60^{2}+(662)60^{3}+(684)60^{4}$. Id, restitutis denominatoribus, est $=$

$$\frac{8(60^\circ)}{60^\circ} + \frac{72}{60^1} + \frac{302}{60^2} + \frac{662}{60^3} + \frac{684}{60^4}$$, seu more Geometrarum $= 8^\circ.\ 71'.\ 302''.\ 662'''.\ 684''''$ Et reductione facta $= 9^\circ.\ 17^1.\ 13^2.\ 13^3.\ 24^4.$ Idem valet de reliquis. Ergo etc.

Detur multiplicandum $(24^\circ\ 00'\ 00''\ 6''')$ per $27''$. Erit

$$\begin{array}{l} \quad 24^\circ\ 6''' \\ \quad\quad 27'' \\ \hline 168^2.\ 162^5. \\ 48 \\ \hline 648^2.\ 162^5. = 10'.48''.00'''.42'''' \end{array}$$

Nam $24^\circ\ 6^3 \times 27^2 = \left(24^\circ + \frac{6}{60^3}\right) \times \frac{27}{60^2} = \frac{(24 \times 27)}{60^2} + \frac{(27 \times 6)}{60^5}$ (§. 52. et §. 71.) $\frac{648}{60^2} + \frac{162}{60^5} = 648^2 + 162^5 =$ etc. Ergo etc.

§. 114. *Problema.* Fractiones sexagesimales dividere.

Resolutio. 1) Quodsi divisor sit numerus integer; incipiatur divisio a specie maxima, residuumque majoris speciei in minorem convertatur proximam, eidemque addatur. E. g.

$(20^0 . 4' . 20'' . 30'''):3 = 6^0 - 41' - 26'' - 50'''$

$$
\begin{array}{r}
18 \\
\hline
2 \\
60 \\
\hline
120 \\
4 \\
\hline
124' \\
12 \\
\hline
4 \\
3 \\
\hline
1 \\
60 \\
\hline
60 \\
20 \\
\hline
80'' \\
6 \\
\hline
20 \\
18 \\
\hline
2 \\
60 \\
\hline
120 \\
30 \\
\hline
150''' \\
150 \\
\hline
0.
\end{array}
$$

2) Quodſi diviſor ſit fractio decimalis; cuivis ordini tot zeri adjiciantur, quot notas decimales diviſor habet, caeterumque ut in Nro. 1. operetur. Sit enim $(7^0\ 29^1\ 6^2) : 5, 48$; erit $\frac{7^0\ 29'\ 6''}{5, 48} = \frac{700^0 . 2900' . 600^2}{5, 48 \times 100} = \frac{700^0\ 2900'\ 600^2}{548}$. Quod jam dividi poteſt, et fractionis valor tamen immutatus manet.

3) Quodſi diviſor ac dividendus ſexageſimalibus conſtiterit; doctrina de potentiis reſpectu expo-

nentium negativorum et positivorum hic iterum erit applicanda. E. g. Dum

a) divisor unum duntaxat ordinem continet.

$$(5^{0}\,36^{-1}\,17^{-2} : 4^{-1} = \frac{5^{0}\,36^{-1}\,17^{-2}}{4^{-1}} =$$

$$\frac{5^{0}}{4^{-1}} + \frac{36^{-1}}{4^{-1}} + \frac{17^{-2}}{4^{-1}}.$$

Sed $\frac{5^{0}}{4^{-1}} = \frac{5 \times 60^{-1}}{4^{-1}} = \frac{300^{-1}}{4^{-1}}$, vel $=$

$\frac{5^{0}}{4^{-1}} = 1^{+1} + \frac{1}{4^{-1}} = 1^{+1} + \frac{60^{-1}}{4^{-1}}$. Et additis $\frac{36^{-1}}{4^{-1}}$; erit $\frac{96^{-1}}{4^{-1}} = 24^{0}$. $\frac{17^{-2}}{4^{-1}} = 4^{-1}$ $+ \frac{1^{-2}}{4^{-1}} = 4^{-1}\ 15^{-2}$. Itaque totus quotus $= 25^{0},\ 4^{\prime}.\ 15^{\prime\prime}$. Operatio ipsa hoc modo instituitur:

$$4^{-1} \,\big|\, 5^0\ 36^{-1}\ 17^{-2} \,\big|\, 1^{+1}.\ 24^0\ .\ 4^{-1}.\ 15^{-2} = 25^0.\ 4^1\ .\ 15^2\ .$$

$$4^0$$
$$\overline{1^0}$$
$$60$$
$$\overline{60}$$
$$36$$
$$\overline{96^{---1}}$$
$$8$$
$$\overline{16^{---1}}$$
$$16$$
$$\overline{17^{---2}}$$
$$16$$
$$\overline{1^{---2}}$$
$$60$$
$$\overline{60^{---3}}$$
$$4$$
$$\overline{20^{---3}}$$
$$20$$
$$\overline{0.}$$

Possent etiam species omnes ad minimam reduci, et tum divisio institui, quotusque iterum in majores ordines reduci.

b) Dum divisor pluribus constat ordinibus; optime proceditur, si tum divisor, cum dividendus primum ad minimum ordinem reducantur, et tum divisio instituatur. Et denique quotus ad majores ordines reducatur.

4) Quodsi dividendus sit numerus decimalis, et divisor sexagesimalis; eodem modo operatur, ut in Nro. b). Est enim

$$1,5 : 8^0\ 22^{---1} = \frac{1,5}{8^0\ 22^{---1}}.\ \text{Et id} = \frac{15}{10} : 8 \times 60^{---1} + 22^{---1} = \frac{15}{10} : \frac{502}{60} = \frac{15 \times 60}{502 \times 10} =$$

$$\frac{90}{502} = 0{,}179.$$

Demonstr. Ex doctrina de potentiis et fractionibus facile jam datur.

Caput III.

De Multiplicatione in numeris mixtis heterogeneis.

§. 115. Praeter Fractiones decimales, quae ideo absque denominatore exprimi possunt, quia earum cyfrae similiter ut illae numerorum integrorum suos valores a suo loco obtinent, variae adhuc aliae fractiones mixtae dantur, quae itidem sine denominatore scribuntur, quia partes unitatis, ex qua hae constant, jam denominatione propria determinatae sunt. Ita dicuntur 6tae partes orgiae, pedes; 12mae partes pedis, digiti; 12mae partes digiti, lineae etc.

Scholion. 1) Qua ratione ex ejusmodi fractionibus compositi numeri addendi, et ab invicem subtrahendi sint, jam in Arithmetica elementari ostendimus: nunc adhuc inquirendum, quo modo cum iisdem multiplicandum, et dividendum sit.

Sholion. 2) Ad haec etiam computatio geometrica referenda. Computandi ratio ad evitandas in supputandis mixtis, et fractis numeris occurentes molestias excogitata; etiam alio nomine *arithmetica decimalis* a perticae mensoriae, seu decempedae in decimas partes divisione appellatur.

Decempeda longitudines, superficies, et corpora mensurantur.

Qua longitudines menſurantur: *decempeda ſimplex* dicitur, atque in pedes 10, pes in 10 digitos, digitus in totidem lineas, linea in totidem ſcrupulos dividitur.

Decempeda quadrata dicitur, quae ad ſuperficierum magnitudinem determinandam adhibetur, continetque 100 pedes quadratos, pes 100 ejusmodi digitos, digitus 100 lineas, linea 100 ſcrupulos.

Decempeda, quae dimetiendis corporibus ſervit, *cubica* vocatur; et continet 1000 pedes cubicos, pes 1000 ejusmodi digitos, digitus totidem lineas, linea totidem ſcrupulos,

Orgiae ſeu decempedae ſignantur zeris, Ita 6 orgiae $= 6^{\circ}$, quia 6 orgiae $= 6 \times 10^{\circ} = 6 \times 1$.

Pedes ſignantur una virgula. Ita 6 pedes $= 6'$; quia 6 pedes $\frac{6}{10^{1}}$ unius orgiae $= 6 \times 10^{-1} =$ ergo ommiſſo factore 10, et tantum exponente retento $= 6^{1}$ vel 6^{-1}.

Digiti ſignantur ex ſimili ratione duabus, lineae tribus, ſcrupuli quatuor virgulis. Ita $9''8''''$ lege 9 digiti, 8 ſcrupuli.

Decempedae ſimplices propter unam dimenſionem una nota, quadratae propter duas dimenſiones duabus notis, cubicae propter trinam dimenſionem tribus notis exprimuntur. Loca ergo vacua cyfris zero replentur. E. gr.

Decempedae ſimplices $2 0^{\circ} 5' 4'' 8''' 9''''$
Quadratae $31^{\circ} 22' 35'' 04''' 04''''$
Cubicae $340^{\circ} 245' 349'' 340''' 544''''$

Reducitur itaque ordinaria longitudinum menſura major ad minorem ſine omni multiplicatione, adjungendo ad priorem quantitatem zerum, quadratica vero adjungendo duos zeros, cubica adjungendo tres zeros; ita 2 decempedae ſimplices dant 20 pedes, 200 digitos, 2000 lineas etc. ordinariae menſurae: quadraticae vero decempedae 2 dant 200 pedes, 20000 digitos, 2000000 lineas quadraticas, et decempedae, 2 cubicae dant 2000 pedes, 2000000 digitos, 2000000000 lineas cubicas: uti ex natura multiplicationis notum eſt. Ergo ſpecies minor ordinaria reducitur ad majorem ſeparando, pro qualibet majori quantitate unam notam: ita 4326 lineae dant $4^{\circ}\ 3'\ 2''\ 6'''$. Ex prioribus enim 4 decempedae dant 4000 lineas,

3 pedes autem ex iisdem dant	300	lineas,
2 digiti dant	20	lineas,
et additis	6	lineis
habentur	4326	lineae.

Quadratica vero ſpecies minor reducitur ad majorem, ſeparando pro qualibet quantitate majori duas notas; ita ſuperficies 3654269 linearum continet $3^{\circ}\ 65'\ 42''\ 69'''$ quadraticas. Cum enim ſpecies major 100 partes quadraticas ſpeciei minoris contineat, diviſione per 100, id eſt ſeparando duas notas, minor ad majorem reducitur. Cubica demum ſpecies minor reducitur ad majorem ſeparando pro qualibet quantitate majori tres notas; ita 665502860 digiti cubici dant $665^{\circ}\ 502'\ 860''$ cubicos. Nam cum quaelibet ſpecies major 1000 partes cubicas ſpeciei minoris contineat, diviſione per 1000 id

est separando tres notas, minor ad majorem reducitur. Dant enim $665^{\circ} = 665000000''$
et $502' = 502000''$
et $560'' = 860''$

ergo $665^{\circ}502'860'' = 665502860''$.

Additio et subtractio in ejusmodi quantitatibus eodem modo, quo vulgaris solet peragitur, summaque et differentia eandem accipit denominationem, quam habent scripti supra lineam numeri. E. gr.

Additio simplex.

$$\begin{array}{r} 35^{\circ}4'5''8''' \\ 9\;\;8\;\;0\;\;7 \\ \hline 46^{\circ}2'6''5''' \end{array}$$

Additio quadrat.

$$\begin{array}{r} 22^{\circ}48'59''68''' \\ 15\;\;09\;\;48\;\;63 \\ \hline 37^{\circ}58'08''31''' \end{array}$$

Cubic.

$$\begin{array}{r} 12^{\circ}325'232'' \\ 10\;\;305\;\;832 \\ \hline 22^{\circ}631'064'' \end{array}$$

Subtractio simplex.

$$\begin{array}{r} 343^{\circ}7'3''1'''0'''' \\ 120\;\;0\;\;6\;\;4\;\;2 \\ \hline 225^{\circ}6'6''6'''8'''' \end{array}$$

Subtractio quadrat.

$$\begin{array}{r} 25^{\circ}54'33''21''' \\ 12\;\;52\;\;40\;\;18 \\ \hline 13^{\circ}01'93''03''' \end{array}$$

Subtractio Cubic.

$$\begin{array}{r} 4324^{\circ}520'864''210''' \\ 219\;\;430\;\;940\;\;008 \\ \hline 4105^{\circ}089'924''202''' \end{array}$$

Ratio ex natura ejusmodi numerorum mixtorum patet, qui eodem ordine quo integri nu-

meri et creſcunt et decreſcunt, atque facile, uti ſuperius dictum erat, ad eundem denominatorem reduci poſſunt; igitur etiam ſimili modo tractantur, quo integri numeri tractari ſolent. Ita *in additione ſimplici*

$$\begin{array}{lcl} 35^{\circ}4'5''8''' & = & 3\,5\,4\,5\,8''' \\ 9\;\;8\;\;0\;\;7 & = & 9\,8\,0\,7'''; \text{ ergo etiam} \\ \hline 45^{\circ}2'6''5''' & = & 4\,5\,2\,6\,5'''. \end{array}$$

In additione quadrat.

$$\begin{array}{lcl} 22^{\circ}48'59''68''' & = & 22\,48\,59\,68''' \\ 15\;\;09\;\;48\;\;63 & = & 15\,09\,48\,63''' \\ \hline 37^{\circ}58'08''31''' & = & 37\,58\,08\,31'''. \end{array}$$

In additione cubic.

$$\begin{array}{lcl} 12^{\circ}325'232'' & = & 12\,325\,232'' \\ 10\;\;305\;832'' & = & 10\,305\,832''; \text{ ergo et} \\ \hline 22^{\circ}631'064'' & = & 22\,631\,064''. \end{array}$$

Idem in ſubtractione eorumdem valet.

§. 116. Si numerus mixtus (quantitas numerata) per alium mixtum multiplicandus ſit; unus toties ſumendus eſt, quot unitates alter in ſe continet. Productum V. gr. ex 6 florenis et 5 orgiis eſt = 6 florenis quinqies, vel 6 flor *5vies* ſumptis = 30 flor., aut 5 orgiae 6ies ſumptae = 30 orgiis.

An modo in talibus caſibus productum uni alterive factori homogeneum ſit, id quaeſtio, quae multiplicationem involvit (cauſſat) decernere debet. Dum quaeritur, quanti 5 orgiae veniant, ſi una orgia 6 flor. conſtat; erit reſponſio: 6 flor. 5vies

ſumptis = 30 flor.; et dum quaeritur, quot orgiae 6 flor. vendantur, ſi 1 flor. 5 orgiae veniunt; eſt reſponſio: 5 orgiae 6ies ſumptae = 30 orgiis.

§. 117. Productum ſemper cum multiplicando homogeneum eſſe debet, quia ex illo oritur (§. 28. Cor. 2. Arith., elem.), hinc bene attendendum in multiplicatione, ut qualitas producti rite determinetur: quis factorum ſit multiplicandus, et quis eorum ſit multiplicator.

Et cum multiplicare ſit quantitatem unam toties ſumere, quot unitates altera continet; unum idemque eſt: an prima per ſecundam, vel ſecunda per primam multiplicetur, dummodo reſpectus qualitatis producti habeatur, id eſt, dummodo diſpiciatur, quae quantitas ſit multiplicandus, et quae multiplicator. Nam ex eo decernitur qualitas producti, cum multiplicator ſemper numerus eſſe debeat.

§. 118. Quodſi jam factores ex integris numeris, et diverſis partibus unitatis mixti fuerint, ac partes factoris illius, qui indicat, quoties alter ſit ſumendus in fractionem ejus unitatis permutentur, cujus productum jam notum eſt: etiam productum ex his partibus invenietur; ſi productum unitatis per hanc fractionem multiplicetur. Huic ſequens tabula inſerviet.

Signa ſub cyfras poſita (°), (′), (″), (‴) denotant, orgias, pedes, digitos, lineas. Eſtque juxta ſubdiviſionem civilem:

$1^{\circ} = 6'$	Igitur $1^{\circ} = 6' = 1^{\circ} \times 6' \times 12 = 72''$.
$1' = 12''$	Et $1^{\circ} = 6' = 72'' = 72'' \times 12 = 864'''$
$1'' = 12'''$	

$$1^{\circ} = 6'$$

$$1^{\circ} = 72''$$

$$1^{\circ} = 864'''$$

$$1' = \frac{1^{\circ}}{6}$$

$$2' = \frac{2^{\circ}}{6} = \frac{1^{\circ}}{3}$$

$$3' = \frac{3^{\circ}}{6} = \frac{1^{\circ}}{2}$$

$$4' = \frac{4^{\circ}}{6} = \frac{1^{\circ}}{3} + \frac{1^{\circ}}{3}$$

$$5' = \frac{5^{\circ}}{6} = \frac{1^{\circ}}{2} + \frac{1^{\circ}}{3}$$

$$6' = \frac{6^{\circ}}{6} = 1^{\circ}$$

$$1'' = \frac{1'}{12}$$

$$2'' = \frac{2'}{12} = \frac{1'}{6}$$

$$3'' = \frac{3'}{12} = \frac{1'}{4}$$

$$4'' = \frac{4'}{12} = \frac{1'}{3}$$

$$5'' = \frac{5'}{12} = \frac{3'}{12} + \frac{2'}{12} = \frac{1'}{4} + \frac{1'}{6}$$

$$6'' = \frac{6'}{12} = \frac{1'}{2}$$

$$7'' = \frac{7'}{12} = \frac{4'}{12} + \frac{3'}{12} = \frac{1'}{3} + \frac{1'}{4}.$$

$$8'' = \frac{8'}{12} = \frac{4'}{12} + \frac{4'}{12} = \frac{1'}{3} + \frac{1'}{3}.$$

$$9'' = \frac{9'}{12} = \frac{6'}{12} + \frac{3'}{12} = \frac{1'}{2} + \frac{1'}{4}$$

$$10'' = \frac{10'}{12} = \frac{6'}{12} + \frac{4'}{12} = \frac{1'}{2} + \frac{1'}{3}$$

$$11'' = \frac{11'}{12} = \frac{8'}{12} + \frac{3'}{12} = \frac{1'}{3} + \frac{1'}{3} + \frac{1'}{4}$$

$$12'' = \frac{12'}{12} = 1' = \frac{1^{\circ}}{6}.$$

$$1'' = \frac{1'}{12} = \frac{1}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{1^{\circ}}{72}$$

$$2'' = \frac{2'}{12} \times \frac{1^{\circ}}{6} = \frac{2^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{36}$$

$$3'' = \frac{3'}{12} \times \frac{1^{\circ}}{6} = \frac{3^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{24}$$

$$4'' = \frac{4'}{12} \times \frac{1^{\circ}}{6} = \frac{4^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{1}$$

$$5'' = \frac{5^{\circ}}{72} = \frac{3^{\circ}}{72} + \frac{2^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{24} + \frac{1^{\circ}}{36}$$

$$6'' = \frac{6^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{12}$$

$$7'' = \frac{7^{\circ}}{72} = \frac{4^{\circ}}{72} + \frac{3^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{18} + \frac{1^{\circ}}{24}$$

$$8'' = \frac{8^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{9}$$

$$9'' = \frac{9^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{8}$$

$$10'' = \frac{10^{\circ}}{72} = \frac{6^{\circ}}{72} + \frac{4^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{12} + \frac{1^{\circ}}{18}$$

$$11'' = \frac{11^{\circ}}{72} = \frac{8^{\circ}}{72} + \frac{3^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{9} + \frac{1^{\circ}}{24}$$

$$12'' = \frac{12^{\circ}}{72} = \frac{1^{\circ}}{6}$$

$$1''' = \frac{1''}{12}$$

$$2''' = \frac{2''}{12} = \frac{1''}{6}$$

$$3''' = \frac{3''}{12} = \frac{1''}{4}.$$

$$4''' = \frac{4''}{12} = \frac{1''}{3}$$

$$5''' = \frac{5''}{12} = \frac{3''}{12} + \frac{2''}{12} = \frac{1''}{4} + \frac{1''}{6}$$

$$6''' = \frac{6''}{12} = \frac{1''}{2}$$

$$7''' = \frac{7''}{12} = \frac{4''}{12} + \frac{3''}{12} = \frac{1''}{3} + \frac{1''}{4}$$

$$8''' = \frac{8''}{12} = \frac{4''}{12} + \frac{4''}{12} = \frac{1''}{3} + \frac{1''}{3}$$

$$9''' = \frac{9''}{12} = \frac{6''}{12} + \frac{3''}{12} = \frac{1''}{2} + \frac{1''}{4}$$

$$10''' = \frac{10''}{12} = \frac{6''}{12} + \frac{4''}{12} = \frac{1''}{2} + \frac{1''}{3}$$

$$11''' = \frac{11''}{12} = \frac{8''}{12} + \frac{3''}{12} = \frac{1''}{3} + \frac{1''}{3} + \frac{1''}{4}$$

$$12''' = \frac{12''}{12} = 1''.$$

$$1''' = \frac{1''}{12} = \frac{1''}{12} \times \frac{1^{o}}{72} = \frac{1^{o}}{864} = \frac{1^{o}}{12 \times 72} = \frac{1^{o}}{12 \times 12.6}.$$

$$2''' = \frac{2''}{12} = \frac{1''}{6} = \frac{2^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{72 \times 6}$$

$$3''' = \frac{3''}{12} \times \frac{1^{o}}{72} = \frac{1^{o}}{72 \times 4}$$

$$4''' = \frac{4^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{72 \times 3}$$

$$5''' = \frac{5^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{72 \times 6} + \frac{1}{72 \times 4}$$

$$6''' = \frac{6}{72 \times 12} = \frac{1}{72 \times 2}$$

$$7''' = \frac{7^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{72 \times 4} + \frac{1^{o}}{72 \times 3}$$

$$8''' = \frac{8^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{9 \times 12}$$

$$9''' = \frac{9^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{8 \times 12}$$

$$10''' = \frac{10^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{72 \times 2} + \frac{1^{o}}{72 \times 3}$$

$$11''' = \frac{11^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{9 \times 12} + \frac{1^{o}}{72 \times 4}$$

$$12''' = \frac{12^{o}}{72 \times 12} = \frac{1^{o}}{72}.$$

Scholion. Secundum hanc tabulam multiplicatio instituenda est, dum floreni et cruciferi per orgias, pedes, et digitos, multiplicandi sunt.

§. 119. *Problema.* Multiplicare florenos, cruciferos etc. per orgias, pedes et digitos.

Resolutio. Imprimis reducantur pedes, digiti etc. ad fractiones orgiae, juxta tabulam datam, tum multiplicentur floreni per orgias, deinde per fractiones vel per partes orgiae, quod revera dividere est. Demum producta partialia addantur, et reducantur ad species majores.

E. gr. Sit 9 flor. 30 crucif. Multiplicandus 3° $4'$ Multiplicator. Erit, hoc ita scripto: 9 flor. 30 crucif. per $3^o\,4'$ vel per $3^o + \frac{1^o}{3} + \frac{1^o}{3}$ multiplicati

27 flor.	+ 90	cruc.	prod. ex 3°
3	10		item ex $\frac{1^o}{3}$
3	10		item ex $\frac{1^o}{3}$
33 fl.	+ 110	cruc.	productum totum ex $3^o\,4'$; reductum =

34 flor. 50 cruciferis.

Demonstr. 9 flor. 30 crucif. multiplicati per 3° = 27 flor. 90 crucif. Et 9 flor. 30 crucifer. multiplicati per $4'$ idem dant, quod 9 flor. 30 cruc. per $\frac{4^o}{6}$ vel per $\left(\frac{1^o}{3} + \frac{1^o}{3}\right)$ multiplicati. Ergo rite multiplicatur.

Scholion. 1) Algebraice, et in fractionibus esset:

$$9 \text{ flor. } 30 \text{ cruc.} = 9 \text{ flor.} + \tfrac{1}{2} \text{ flor.}$$

$$3^0\, 4' = 3^0 + \frac{4^0}{6}$$

$$27 \text{ fl.} + \tfrac{3}{2} \text{ fl.} + \tfrac{36}{6} \text{ fl.} + \tfrac{4}{12} \text{ fl.}$$

id est 27 fl. + 6 fl. + 1 fl. + 30 cruc. + 20 cruc.
= 34 fl. + 50 cruc.

Scholion. 2) Possent floreni in cruciferos reduci, et tum multiplicatio institui. Ut

$$9 \text{ flor. } 30 \text{ cruc.} = 9 \times 60 + 30 = 570 \text{ cruc.}$$

$$\text{multiplicati per } 3^0 \frac{4}{6} = 3^0 \frac{1^0}{3} + \frac{1^0}{3}$$

1710 crucif.
\+ 190
\+ 190

2090 crucif.

Et (2090 crucifer.) : 60 = 34 flor. 50 cruciferis.

Scholion. 3) Vel possent quantitates heterogeneae ad eandem speciem, sed in fractionibus reduci, et tunc multiplicatio institui. Ut 9 fl. 30 cruc.

$$\times 3^0\, 4' = 9\frac{1}{2} \text{ fl.} \times 3\frac{4^0}{6}. \quad \text{Ergo } 9\frac{1}{2} \text{ fl.} \times$$

$$3\frac{2^0}{3}, \text{ seu } \frac{19}{2} \text{ fl.} \times \frac{11^0}{3} = \frac{19 \times 11}{6} \text{ floren.} =$$

$$\frac{209}{6} \text{ flor.} = 34\frac{5}{6} \text{ flor.} = 34 \text{ flor. } 50 \text{ cruc.}$$

Exempla. 1) 9 fl. 30 cruc, Multiplicandus

$3^\circ\ 3'\ 6'' = 3^\circ \frac{1^\circ}{2} + \frac{1^\circ}{12}$ multiplicat.

27 fl. + 90 cruc. product ex 3°,
4 fl. + 45 cruc. item ex $3'$
0 fl. + $47\frac{1}{2}$ cruc. item ex $6''$*

31 fl. + $182\frac{1}{2}$ cruc. = (prod. tot. ex $3^\circ\ 3'\ 6''$)
34 flor. $2\frac{1}{2}$ cruc.

* Est enim 9 fl. 30 cruc. $\times\ 6'' = \frac{9 \text{ fl. } 30 \text{ cruc.}}{2 \times 6}$

Vel modo hoc: 9 fl. + $\frac{1}{2}$ fl. = 9 fl. + 30 cr.

$3^\circ \frac{1^\circ}{2} + \frac{1^\circ}{12} = 3^\circ\ 3'\ 6''$

algebraice 27 fl. + $\frac{3}{2}$ fl. + $\frac{9}{2}$ fl. + $\frac{1}{4}$ fl. + $\frac{9}{12}$ fl. $\frac{1}{24}$ fl.

Id est: 27 fl.
1 fl. 30 cruc. = $\frac{3}{2}$ fl.
4 fl. 30 cruc. = $\frac{9}{2}$ fl.
15 cruc. = $\frac{1}{4}$ fl.
45 cruc. = $\frac{9}{12}$ fl.
$2\frac{1}{2}$ cruc. = $\frac{1}{24}$ fl.

34 fl. + $2\frac{1}{2}$ crucifer.

2) 9 flor. 30 crucif.

$3^\circ\ 3'\ 8'' = 3^\circ \frac{1^\circ}{2} + \frac{1^\circ}{9}$

27 flor. 90 cr. prod. ex 3°
4 flor. 45 cr. item ex $3'$
1 flor. $3\frac{3}{9}$ cr. item ex $8''$

32 fl. $138\frac{3}{9}$ cr. = 34 fl. $18\frac{1}{3}$ cr.

$8'' = \frac{1^\circ}{9}$; potest ergo sumi $\frac{9 \text{ fl. } 30 \text{ cruc.}}{9} =$ 1 fl. $3\frac{3}{9}$ cruc.

Vel algebraice: 9 fl. $\frac{1}{2}$ fl.

$$3^{\circ}\frac{1^{\circ}}{2}+\frac{1^{\circ}}{9}$$

27 fl. + $\frac{3}{2}$ fl. + $\frac{9}{2}$ fl. + $\frac{1}{4}$ fl.
+ $\frac{2}{9}$ fl. + $\frac{1}{18}$ fl.

Id est: 27 fl.
1 fl. 30 cr. = $\frac{3}{2}$ fl.
4 fl. 30 cr. = $\frac{9}{2}$ fl.
15 cr. = $\frac{1}{4}$ flor.
1 fl. = $\frac{2}{9}$ flor.
$3\frac{1}{3}$ cr. = $\frac{1}{18}$ flor.

34 fl. $18\frac{1}{3}$ crucifer.

3) 9 fl. 30 cruc.

$$4^{\circ}\ 2'\ 5'' = 4^{\circ}+\frac{1^{\circ}}{3}+\frac{1'}{4}+\frac{1'}{6}$$

36 fl. 120 cruc. productum ex 4°
3 10 item ex $2'$
0 23 cr. 3 terunc. item ex $\frac{1'}{4}$ *)
0 15 cr. $3\frac{1}{3}$ terunc. item ex $\frac{1'}{6}$

41 fl. 49 cr. $2\frac{1}{3}$ teruncii totum productum.

*) $\frac{9\text{ flor. }30\text{ cruc.}}{6\times4} = \frac{9\text{ flor. }30\text{ cr.}}{3\times2\times4} = \frac{9\text{ fl. }30\text{ cr.}}{3.\ 8} = \frac{3\text{ flor. }10\text{ cr.}}{8} = \frac{180+10\text{ cr.}}{8} = \frac{190\text{ cruc.}}{8} =$

23 cruc. 3 rerunc. Tum $\frac{9 \text{ fl. } 30 \text{ cr.}}{6 \times 6} = \frac{9 \text{ fl. } 30 \text{ cr.}}{3 . 12}$

$= \frac{3 \text{ fl. } 10 \text{ cr.}}{12} = \frac{190. \text{ cr.}}{12} = 15 \frac{10}{12}$ cruc. $=$ 15 cruc. $3 \frac{4}{12}$ terunc.

Vel ita repraeſentando:

9 flor. 30 cruc.

$4^0\, 2'\, 5'' = 4^0 + \frac{1}{3} + \frac{1^0}{24} + \frac{1^0}{36}$

---

36 flor.	120 cruc.	prod. ex 4^0
3	10	item ex $\frac{1^0}{3}$
0	23 cr. 3 ter.	item ex $\frac{1^0}{24}$
0	15 cr. $3\frac{1}{3}$ terunc.	item ex $\frac{1^0}{36}$.

---

41 flor. 49 cr. $2\frac{1}{3}$ terunc. prod. totum.

Sumantur itaque: 9 flor. 30 cruc. primum quater; tum $\frac{1}{3}$ parte; deinde $\frac{1}{6}$ parte, et de hac $\frac{1}{6}$ parte quaeratur $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{6}$ pars, quae demum addantur. Erit ergo ut ſupra. Nam $\frac{9 \text{ flor. } 30 \text{ cruc.}}{3}$

$=$ 3 flor. 10 cruc.

Et $\frac{3 \text{ fl. } 10 \text{ cruc.}}{2} = 1 \text{ fl. } 35 \text{ cruc.} = \frac{9 \text{ fl. } 30 \text{ cr.}}{6}$

$=$ 95 cruc. Erit $\frac{95 \text{ cruc.}}{4} =$ 23 cruc. 3 terunc.

et $\frac{95 \text{ cruc.}}{6} =$ 15 cr. $3\frac{1}{3}$ terunc.

4) 9 flor. 39 cruc.

$$5^\circ\ 4'\ 9'' = 5^\circ + \frac{1^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{8}$$

45 fl.	195 cruc.	prod. ex 5°
3	13	item ex $\frac{1^\circ}{3}$
3	13	item ex $\frac{1^\circ}{3}$
1	12	$1\frac{1}{2}$ terunc. prod. ex $\frac{1^\circ}{8}$
55 fl.	53 cruc.	$1\frac{1}{2}$ terunc. prod. totum.

Vel: 9 flor. 39 cruc. = 9 fl. 39 cruc.

$$5^\circ\ 4'\ 9'' = 417'' = \frac{417^\circ}{72}$$

$$\frac{9 \times 417}{72}\ \text{fl.} + \frac{39 \times 417}{72}\ \text{cruc. Id est} =$$

$$\frac{1 \times 417}{8}\ \text{fl.} + \frac{39 \times 417}{72}\ \text{cruc.} = 55\ \text{flor.}\ 53\ \text{cr.}$$

$1\frac{1}{2}$ terunc.

Vel hoc modo:

9 fl. 39 cruc. = 540 + 39 cruc. = 579 cruc.

$5^\circ\ 4'\ 9'' = 5^\circ + \frac{1^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{8}$

2895 cruc = $579 \times 5^\circ$

193 = $579 \times \frac{1^\circ}{3}$

193 = $579 \times \frac{1^\circ}{3}$

72 cruc. $1\frac{1}{2}$ terunc. = $579 \times \frac{1^\circ}{8}$

3353 cruc. $1\frac{1}{2}$ terunc. = 55 fl. 53 cr. $1\frac{1}{2}$ terunc.

5) 2 fl. 6 cruc.

$7^\circ\ 4'\ 3'' = 7^\circ + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1^\circ}{24}$

---

14 fl. 42 cruc. product. ex 7°

42 cruc. item ex $\frac{1^\circ}{3}$

42 cruc. item ex $\frac{1^\circ}{3}$

5 cr. 1 ter. item ex $\frac{1^\circ}{24}$

---

16 fl. 11 cr. 1 terunc. prod. totum.

Seu:

2 flor. 6 cruc.

$7^\circ + \frac{1^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{24}$

---

14 flor. 42 cruc.
$+ \frac{2}{3}$ fl. $+ \frac{6}{3}$ cruc. $+$
$\frac{2}{3}$ fl. $+ \frac{6}{3}$ cr. $+ \frac{2}{24}$ fl.
$+ \frac{6}{24}$ cruc. Id est:

14 flor. 42 cruc.
40 cruc. $= \frac{2}{3}$ fl.
2 cruc. $= \frac{6}{3}$ cr.
40 cruc. $= \frac{2}{3}$ fl.
2 cruc. $= \frac{6}{3}$ cr.
5 cruc. $= \frac{2}{24}$ fl.
1 terunc. $= \frac{6}{24}$ cr.

---

16 flor. 11 cr. 1 terunc.

6) 2 fl. 30 cr.

$7^\circ\, 3' = 7^\circ + \frac{1^\circ}{2}$

---

14 fl. 210 cr. ex 7°
1 15 cr. ex $3'$

---

15 fl. 225 cr. = 18 fl. 45 cr.

2 fl. 30 cr. $=$ 2 fl. $+ \frac{1}{2}$ fl.

$7^\circ + \frac{1^\circ}{2}$.

---

14 fl. $+ \frac{7}{2}$ fl.
$+ \frac{2}{2}$ fl. $+ \frac{1}{4}$ fl.

---

14 fl. $+ \frac{9}{2}$ fl. $+ \frac{1}{4}$ fl. $=$ 18 fl.
$+$ 45 cruc.

Seu ita: 2 fl. 30 cruc. $=$ 150 crucifer.

$7^\circ + \frac{1^\circ}{2}$

1050 cruc. ex 7°

75 cruc. ex $\frac{1^\circ}{2}$

1125 cr. $=$ 18 fl. 45 cruc.

§. 120. Quodsi orgiae, pedes, et digiti, per florenos, cruciferos, et teruncios sint multiplicanda; multiplicatio eo facilior evadit. Nam

60 cruc. $=$ 1 flor.
30 cruc. $= \frac{1}{2}$ flor.
15 cruc. $= \frac{1}{4}$ flor.
24 cruc. $= \frac{12}{60} + \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ flor. $+ \frac{1}{5}$ flor.

et ita porro; unde facili modo tabula cruciferorum et terunciorum in fractionibus unius floreni construitur, secundum quam multiplicatio simili modo, ut antea (§. 119.) peragitur.

Exempla. 1) $4^0\ 3'$ multiplicandus
2 flor. 30 cruc. $= 2$ fl. $\frac{1}{2}$ fl. multipl.

$8^0\ 6'$ product. ex 2 flor.
$2^0\ 1'\ 6''$ item ex $\frac{1}{2}$ flor.

$10^0\ 1'\ 6''$ productum totum.

2) $4^0\ 3'\ 6''$ multiplicandus
2 flor. 15 cruc. $= 2$ fl. $+ \frac{1}{4}$ flor.

$8^0\ 6'\ 12''$ product. ex 2 flor.
$1^0\ 0.\ 10.\ 6'''$ item ex $\frac{1}{4}$ flor.

$10^0\ 1'\ 10''\ 6'''$ productum totum.

3) $4^0\ 3'\ 6''$ multiplicandus
2 flor. 40 cruc. $= 2$ fl. $+ \frac{1}{3}$ fl. $+ \frac{1}{3}$ flor.

$8^0\ 6'\ 12''$ product. ex 2 flor.
1 3 2 item ex $\frac{1}{3}$ flor.
1 3 2 item ex $\frac{1}{3}$ flor.

$12^0\ 1'\ 4''$ productum totum.

4) $4^0\ 3'\ 6''$ multiplicandus
2 fl. 40 cr. 3 ter. $= 2$ fl. $+ \frac{1}{3}$ fl. $+ \frac{1}{3}$ fl. $+ \frac{1}{60} \times \frac{3}{4}$.
Id est $4^0\ 3'\ 6''$ multiplicandus

$$2 \text{ flor.} + \frac{1}{3} \text{ fl.} + \frac{1}{3} \text{ fl.} + \frac{1}{20 \times 4} \text{ multipl.}$$

Ergo sumatur ($4^0\ 3'\ 6''$) bis; tum $\frac{1}{3}$ parte, deinde $\frac{1}{3}$ parte; postea $\frac{1}{4}$ parte, et id divide per 20, et adde producta partialia; obtinebis productum totum.

5) $1^{\circ}\ 5'\ 6''$ multiplicandus
6 fl. 55 cruc. $= 6$ fl. $+ \frac{1}{2}$ fl. $+ \frac{1}{4}$ flor.

$6^{\circ}\ 30'\ 36''$ productum ex 6 flor.
$0.\ \ 5.\ \ 9.$ item ex $\frac{1}{2}$ flor.
$0.\ \ 2.\ \ 10.\ \ 6'''$ item ex $\frac{1}{4}$ flor.

$12^{\circ}\ 5'\ 7''\ 6'''$ totum productum.

Vel: $1^{\circ}\ 5'\ 6'' = 11'\ 6''$
6 fl. 55 cruc. $= 6$ fl. $+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$66' + 36''$ ex 6 flor.
$5. + 9.$ ex $\frac{1}{2}$ flor.
$2. + 10.\ 6'''$ ex $\frac{1}{4}$ flor.

$12^{\circ}\ 5'\ 7''\ 6'''$ totum product.

6) $10^{\circ}\ 4'\ 1''\ 6'''$
2 fl. 40 cr. $= 2$ fl. $+ \frac{1}{3}$ fl. $+ \frac{1}{3}$ fl.

$20^{\circ}\ 8'\ 2''\ 12'''$ prod. ex 2 flor.
$3.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 6.$ prod. ex $\frac{1}{3}$ flor.
$3.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 6.$ prod. ex $\frac{1}{3}$ flor.

$28^{\circ}\ 3'\ 0''\ 0'''$ productum totum.

§. 121. *Problema.* Multiplicare florenos, cruciferos et teruncios, per libras, semiuncias et drachmas, vel vicissim.

Resolutio. 1) Convertantur primum semiunciae et drachmae in fractiones librae, et tum fiat multiplicatio in integris et fractionibus.

2) Convertantur cruciferi et teruncii in fractiones floreni, et tum instituatur multiplicatio.

Exempla ad Casum I.

2 flor. 27 cruc. 1 terunc. = 2 flor. 27. cr. 1. ter.
3 ℔ 24 semiunc. = 3 ℔ + 16 sem. + 8 sem. =
3 ℔ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ ℔

6 fl. + 81 cr. + 3 ter. ex 3 ℔
1. 13. $2\frac{1}{2}$ ter. ex $\frac{1}{2}$ ℔
0. 36. $3\frac{1}{4}$ ter. ex $\frac{1}{4}$ ℔

7. 132 cruc. $0\frac{3}{4}$ terunc.
seu; 9 flor. 12 cruc. $\frac{3}{4}$ terunc.

Schol. Possent etiam imprimis in multiplicando majores species ad minimam reduci, et tum multiplicatio institui. Ut 2 fl. 27 cr. 1 ter. = 589 ter.
3 ℔ 24 sem. = 3 ℔ + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{4}$ ℔

1767 terunc. = 589 × 3 ℔
$294\frac{1}{2}$ = 589 × $\frac{1}{2}$ ℔
$147\frac{1}{4}$ = 589 = $\frac{1}{4}$ ℔

$2208\frac{3}{4}$ terunciis. Et

$\frac{2208\frac{3}{4}\text{ terunc.}}{240}$ = 9 flor. 12 cruc. $\frac{3}{4}$ terunc.

2) 3 flor. 40 cruc.
10 ℔ 12 Semiunc. = 10 ℔ + $\frac{1}{4}$ ℔ + $\frac{1}{8}$ ℔.

30 fl. 400 cruc. prod. ex 10 ℔ (libris)
55 cruc. prod. ex $\frac{1}{4}$ ℔
27 cr. 2 ter. prod. ex $\frac{1}{8}$ ℔

38 fl. 2 cruc. 2 terunc. totum productum.

Seu: 3 flor. 40 cruc. = 220 cruc.
10 ℔ 12 semiunc. = 10 ℔ + $\frac{1}{4}$ + $\frac{1}{8}$ ℔.

2200 cruc. ex 10 ℔
55 cruc. ex $\frac{1}{4}$ ℔
27 cruc. 2 terunc. ex $\frac{1}{8}$ ℔

2282 cruc. 2 terunc.
seu: 38 fl. 2 cruc. 2 terunc.

Exempla ad Casum II.

1) 12 ℔ 20 semiunc.
3 flor. 50 cruc. = 3 fl. + $\frac{1}{2}$ flor. + $\frac{1}{3}$ flor.

36 ℔ 60 semiunc. prod. ex 3 flor.
6 ℔ 10 semiunc. prod. ex $\frac{1}{2}$ flor.
4 ℔ 6 sem. 2$\frac{2}{3}$ drachm. prod. ex $\frac{1}{3}$ flor.

46 ℔ 76 sem. 2$\frac{2}{3}$ drachm. prod. totum. Seu
48 ℔ 12 sem. 2$\frac{2}{3}$ drachm.

2) 20 ℔ 5 semiunc.
3 fl. 30 cruc. = 3 flor. + $\frac{1}{2}$ fl.

60 ℔ 15 semiunc. product. ex 3 fl.
10 ℔ 2 sem. 2 drachm. prod. ex 30 cruc.

70 ℔ 17 sem. 2 drachm. prod. totum.

Schol. Adnotatio sequens conferenda cum doctrina de proportionibus.

Sit productum quodcunque = *ab* = x; erit 1 : a = b : x, vel 1 : b = a : x, id est, 1 habet se ad multiplicatorem, sicut se habet multiplicandus ad productum. Potest ergo secundum hanc regulam etiam hac ratione multiplicatio institui, ut primum proportio isthaec inter 1, multiplicatorem, multiplicandum et productum

quaesitum instituatur, tum termini ad simpliciores expressiones reducantur. et denique multiplicentur. Ex id genus operatione etiam id commodum acquiritur, ut statim sciatur, quale sit productum, si id ex quaestione sola decerni nequeat. Praeterea quod ex tali operatione etiam fractiones elidi possint. Tamen primum dijudicari debet, quaenam operatio sit facilior, adeoque accomodatior.

Exempla 1) Sit quaestio: 1° constat 2 fl. 30 cruc. quanti veniunt 7° 3′? Responsio. (2 fl. 30 cr.) $\times$ (7° 3′) seu 18 fl. 45 cruc. Nam

1° : 7° 3′ = 2 fl. 30 cr. : x flor. Ergo

6′ : 45′ = $2\frac{1}{2}$ fl. : x flor., seu

2 : 15 = $\frac{5}{2}$: x fl.

2 : $\frac{5}{2}$ = 15 : x fl. seu

4 : 5 = 15 : x flor.

$$x = \frac{5 \times 15}{4} \text{ fl.} = \frac{75}{4} \text{ fl.} = 18 \text{ fl. } \frac{3}{4}.$$

Posset etiam poni 1° : $7\frac{1}{2}$° = $2\frac{1}{2}$ fl. : x fl.

seu 1 : $\frac{15}{2}$ = $\frac{5}{2}$: x flor.

$$\frac{15 \times 5}{4} = \text{x flor., ut paullo ante.}$$

2) Quaestio: 1 ℔ venditur 3 flor. 40 cruc. quanti 10 ℔ 12 semiunciae? Responsio. (3 fl. + 40 cruc.) $\times$ (10 ℔ 12 semiunc.). Erit 1 ℔ : 10 ℔ 12 semiunc. = 3 fl. 40 cruc. : x fl.

Ergo 32 sem. : 332 sem. = $3\frac{40}{60}$ fl. : x fl.

seu 1 : 10 $\frac{12}{32}$ = $3\frac{2}{3}$ fl. : x fl. seu

1 : 10 $\frac{3}{8}$ = $\frac{11}{3}$: x fl. seu

1 : $\frac{83}{8}$ = $\frac{11}{3}$: x fl.

8 : 83 = $\frac{11}{3}$: x flor.

$24 : 83 = 11 : x$ flor.; ergo

$$x = \frac{83 \times 11}{24} \text{ flor.}$$

§. 122. *Problema.* Multiplicare florenos, cruciferos et teruncios per florenos, cruciferos et teruncios.

Resolutio. Potest multiplicatio, si daretur, institui 1) si imprimis in multiplicando et in multiplicatore omnes species ad minimam reducantur, tum multiplicetur, et denique factum ad majores species reducatur. Ubi autem bene notandum, multiplicatorem semper esse numerum; adeoque fractionem floreni. 2) Si solum in multiplicando species in minimam resolvantur, et tum multiplicetur, postea factum reducatur. 3) Si in multiplicatore species ad fractiones floreni reducantur, et tum per fractiones operatio fiat.

Exempla.

1) 3 fl. 30 cruc. = 180 + 30 = 210 cruc.
4 fl. 20 cruc. = 240 + 20 = 260 crucif.

Ergo erit 210 multiplicandus
260 multiplicator;

12600
42

60 | 54600 cruc. | dat 910 flor.
540
60
60
0.

Quod abſurdum eſt; igitur 910 adhuc per 60 dividi debent. Nam 210 cruciferi $\times$ 260 cruc.

$$= \frac{210}{60} \times \frac{260}{60} = \frac{210 \times 260}{60 \times 60} = \frac{910}{60} = 15\tfrac{1}{6} \text{ flor.}$$

= 15 flor. 10 cruc.

2) 3 fl. 30 cruc. = 210 cruc.
4 fl. 20 cruc. = 4 fl. + $\frac{1}{3}$ fl.

840 cruc. ex 4 flor.
70 cruc. ex $\frac{1}{3}$ flor.

910 cr. = 15 flor. 10 cruc.

3) 3 flor. 30 cruc.
4 flor. 20 cruc. = 4 flor. $\frac{1}{3}$

12 fl. 120 cruc. ex 4 flor.
1 10 cruc. ex $\frac{1}{3}$ flor.

15 fl. + 10 cruc. product. totum.

§. 123. *Problema.* Multiplicare orgias, pedes, digitos, per orgias, pedes, digitos, et lineas, vel hexapedas et earum partes, per hexapedas, et earum partes (ſecundum ſubdiviſionem civilem).

Reſolutio. Multiplicatio cum ejusmodi quantitatibus varia methodo peragi poteſt, quae a Germanis (*Toiſirkunſt*) appellatur.

1*ma Methodus.* Secundum hanc ſpecies omnes reducuntur ad minimam, et tunc multiplicatur, factumque ad majores ſpecies reducitur advertendo ad regulas multiplicationis per fractiones, quales partes orgiae revera ſunt.

Exempla 1) $3^{\circ}\,4' = 18' + 4 = 22'$
$2^{\circ}\,3' = 12 + 3 = 15$

$$\begin{array}{r} 110 \\ 22 \\ \hline 330:36. \end{array}$$

Et $\dfrac{330^{\circ}}{36} = \dfrac{360}{6\times 6} = \dfrac{55^{\circ}}{6} = 9^{\circ}\tfrac{1}{6} = 9^{\circ}\ 1'.$

Nam $3^{\circ}\ 4' = \dfrac{22^{\circ}}{6}.$

$2^{\circ}\ 3' = \dfrac{15^{\circ}}{6}.$

Ergo $\dfrac{22^{\circ}}{6} \times \dfrac{15^{\circ}}{6} = \dfrac{22\times 15}{6.\ 6} = 9^{\circ}\ 1'.$

2) $3^{\circ}\ 4'\ 5'' = 22'\ 5'' = 269''$
$2^{\circ}\ 3' = 15' = 180''.$

Ergo $269'' \times 180'' = \dfrac{48420'}{144} = 336' +$

$\dfrac{36'}{144}$ etc.

Schol. In hac methodo factum inventum, ſemper per quadratum numeri, qui unitatem ordinis ſuperioris efficit, dividendum eſt.

2da Methodus. Juxta hanc ſpecies in multiplicando et in multiplicatore reducuntur ad fractiones orgiae, et tunc ſecundum regulas fractionum fit multiplicatio; factumque inventum reducitur ad ſpecies majores.

E. g. $3^\circ\,4' \times 2^\circ\,3' = 3\frac{4}{6}^\circ \times 2\frac{3}{6}^\circ = 3\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{2} = \frac{11}{3}^\circ \times \frac{5}{2} = \frac{55}{6}^\circ = 9^\circ\,1^\circ$.

Et $3^\circ\,4'\,5'' \times 2^\circ\,3' = (3^\circ + \frac{2}{3} + \frac{5}{72}) \times 2\frac{1}{2}^\circ =$ producto quaesito.

3tia Methodus. Secundum hanc solum in multiplicatore (vel in uno duntaxat factore) species ad fractiones orgiae reducuntur, quae reductio juxta tabulam allatam (§. 118.) facili modo fieri potest, tunc multiplicatur multiplicandus per orgias et per fractiones orgiae juxta regulas fractionum; productaque partialia addita reducuntur ad species majores.

Exempla.

1) $4^\circ\,4'\,6''$
$2^\circ\,3' = 2^\circ + \frac{1}{2}^\circ$

$8^\circ\,8'\,12''$ prod. ex 2°
$2\;\;2\;\;3$ prod. ex $\frac{1}{2}^\circ$

$10^\circ\,10'\,15''$ totum; seu
$11^\circ\,5'\,3''$.

Est enim
$4^\circ\,4'\,6''$
$2^\circ\,3'$

$8^\circ\,8'\,12''$ ex 2°
$$12' + \frac{12'}{6} + \frac{18^\circ}{72 \times 6}.$$

Id est
$8^\circ\,8'\,12''$
$12'$
$2' = \frac{12'}{6}$
$$3'' = \frac{18^\circ}{72 \times 6}$$

$11^\circ\,5'\,3''$.

2) $6^\circ\ 4'\ 5''$

$3^\circ\ 2' = 3^\circ + \frac{1}{3}^\circ$

$18^\circ\ 12'\ 15''$ prod. ex 3°

$2.\ 1.\ 5.\ 8'''$ ex $\frac{1}{3}^\circ$

$22^\circ\ 2'\ 8''\ 8'''$ prod. tot.

Est enim $6^\circ\ 4'\ 5''$

$3^\circ\ 2'$

$18^\circ\ 12'\ 15''$

$12'$

$\frac{8'}{6} + \frac{10''}{6}$.

Id est $18^\circ\ 12'\ 15''$

$12'$

$1\ 4'' = \frac{8'}{6}$

$1''\ 8''' = \frac{10}{6}$

$22^\circ\ 2'\ 8''\ 8'''$ pr. tot.

3) $6^\circ\ 4'\ 0''$

$3^\circ\ 5'\ 1''$

$18^\circ\ 12'$ ex 3°

$30'$

$\frac{20}{6}\ 6''$

$\frac{4''}{6}$

$18^\circ\ 42'\ 6''$

$3\ 4$

$8'''$

$25^\circ\ 3'\ 10''\ 8'''$

Est ergo

$3^\circ\ 5'\ 1'$

$6^\circ\ 4' = 6^\circ + \frac{1}{3}^\circ + \frac{1}{3}^\circ$

$18^\circ\ 30'\ 6''$ prod. ex 6°

$1\ \ 1\ \ 8.\ 4'''$ ex $\frac{1}{3}^\circ$

$1\ \ 1\ \ 8\ \ 4$ ex $\frac{1}{3}^\circ$

$25^\circ\ 3'\ 10''\ 8'''$ prod. tot.

4) $3'\ 4''$

$2'\ 5''$

$1'\ 1''\ 4''' = \frac{6'}{6} + \frac{8''}{6}$

$6'\ 2''\ 6''' = \frac{15''}{6}$

$0'\ 0''\ 3'''\ 4'''' = \frac{20'''}{6}$

$1'.\ 4''.\ 1'''.\ 4''''.$ tot. pr.

Vel $2'\ 5'' = 29''$

$3'\ 4'' = \frac{1}{2}^\circ + \frac{1}{18}^\circ$

$\frac{29''}{2} + \frac{29''}{18}$.

Nam $3'\ 4' = 3'\ 4''$

$2'\ 5'' = \frac{1}{3}^\circ + \frac{5}{72}^\circ$

$\frac{3'}{3} + \frac{4''}{3} = \frac{6'}{6} + \frac{8''}{6}$

$\frac{15'}{72} + \frac{20''}{72} = \frac{15}{6} + \frac{20'''}{6}$

Vel $2'\ 5''$

$3'\ 4'' = \frac{1}{2}^\circ + \frac{1}{18}^\circ$

$1'\ 2''\ 6'''$ ex $\frac{1}{2}$

$0.\ 1.\ 7.\ 4''''$ ex $\frac{1}{18}^\circ$

$1'\ 4''\ 1'''\ 4''''$. tot. prod.

5.) $6^{0}\ 3'\ 4''$

$2^{0}\ 3'\ 8'' = 2^{0} + \frac{1^{0}}{2} + \frac{1^{0}}{9}$

$12^{0}\ 6'\ 8''$ prod. ex 2^{0}

$3\ \ 1\ 8$ prod. ex $3'$

$0.\ 4.\ 4.\ 4'''.\ 4''''$ prod. ex $\frac{1^{0}}{9}$.

$17^{0}\ 0'\ 8''\ 4'''\ 4''''$

Est enim

$6^{0}\ 3'\ 4''$

$2^{0}\ 3'\ 8''$

$12^{0}\ 6'\ 8''$ ex 2^{0}

$18'.$

$+9' + \frac{12''}{6}$

$+48'' +$

$\frac{24''}{6} + \frac{32''}{6}$. Id est reductis

$17^{0}\ 0'\ 8''\ 4'''\ 4''''.$ prod.

4ta Methodus. Haec est facillima et generalis praestandi multiplicationem in orgiis (hexapedis), pedibus, et digitis.

Productum totum numerorum mixtorum heterogeneorum, qui numeri hexapedarum partes, cum vel sine hexapedis habent, obtinetur, si

1) hexapedae, et omnes homogeneae (similes) partes accurate infra se scribantur, et quivis locus vacuus hexapedarum vel earum partium zero repleatur;

2) quodvis partiale productum accurate infra illum locum scribi incipiatur, quocum modo multiplicatur;

3) quodvis productum ex hexapedis in hexapedas, vel in partes hexapedarum simplex (simpliciter), et quodvis productum ex partibus hexapedarum duplex (dupliciter vel duplum) sumatur;

4) Summa omnium productorum partialium quaeratur, et debite in ordines (species) altiores reducatur. Ex. gr.:

1) $6^{0}\ 5'\ 3''$
$3^{0}\ 4'\ 2''$

$18^{0}\ 15'\ 9''$
$24.40.24'''$
$12.20.12''''$

$18^{0}\ 39'\ 61''\ 44'''\ 12''''$
seu
$25^{0}\ 2'\ 4''\ 9''\ 0''''$ prod. totum.

2) $0^{0}\ 0'\ 9''$
$0.\ 4'\ 0''$

$36 \times 2 = 72''' = 6''$

3) $6^{0}\ 3'\ 4''$
$2^{0}\ 3'\ 0''$

$12^{0}\ 6'\ 8''$
$18.\ 18.\ 24'''$
$16^{0}\ 2'\ 4''\ 0'''$. prod. totum.

Demonstr. Sint $a^{0}\ b'\ c''$ per $m^{0}\ n'\ p''$ multiplicanda; est $m^{0}\ n'\ p'' = m^{0} + \frac{n^{0}}{6} + \frac{p^{0}}{72}$, igitur multiplicatur algebraice.

$$a^{0} + b' + c'' \text{ per}$$
$$m^{0} + \frac{n^{0}}{6} + \frac{p^{0}}{72}, \text{ estque}$$

$am^{0} + mb' + mc''$ productum ex m^{0};

$+\left(\frac{an}{6}\right)^{0} + \left(\frac{bn}{6}\right)' + \left(\frac{nc}{6}\right)''$ item ex $\left(\frac{n}{6}\right)^{0}$

$$+\left(\frac{ap}{72}\right)^{o}+\left(\frac{bp}{72}\right)^{\prime}+\left(\frac{cp}{72}\right)^{\prime\prime} \text{ item ex } \left(\frac{p}{72}\right)^{o}.$$

Verum $\left(\frac{an}{6}\right)^{o}=\frac{an^{o}}{6}\times 6=an^{\prime}$

$$\left(\frac{bn}{6}\right)^{\prime}=\frac{bn^{\prime}}{6}\times 12=2bn^{\prime\prime}$$

$$\left(\frac{nc}{6}\right)^{\prime\prime}=\frac{nc^{\prime\prime}}{6}\times 12=2.\,nc^{\prime\prime\prime}.$$ Et

$$\left(\frac{ap}{72}\right)^{o}=\frac{ap^{o}}{72}\times 6\times 12=ap^{\prime\prime}$$

$$\left(\frac{bp}{72}\right)^{\prime}=\frac{bp^{\prime}}{72}\times 12\times 12=2.\,bp^{\prime\prime\prime}$$

$$\left(\frac{cp}{72}\right)^{\prime\prime}=\frac{cp^{\prime\prime}}{72}\times 12\times 12=2.\,cp^{\prime\prime\prime\prime}.$$ Itaque

etiam erit: $a^{o}\ b^{\prime}\ c^{\prime\prime}$

$m^{o}\ n^{\prime} p^{\prime\prime}$

$$am^{o}+mb^{\prime}+mc^{\prime\prime}$$
$$+an^{\prime}+2bn^{\prime\prime}+2nc^{\prime\prime\prime}$$
$$+ap^{\prime\prime}+2bp^{\prime\prime\prime}+2cp^{\prime\prime\prime\prime}.$$

Si ergo $a^{o}\ b^{\prime}\ c^{\prime\prime}$ multiplicanda ſint per $m^{o}\ n^{\prime}$ $p^{\prime\prime}$; erit

$a^{o}\ b^{\prime}\ c^{\prime\prime}=a^{o}\times\frac{b^{o}}{6}+\frac{c^{o}}{72}$; et

$m^{o}\ n^{\prime}p^{\prime\prime}=m^{o}+\left(\frac{n}{6}\right)^{o}+\left(\frac{p}{72}\right)^{o}$; ergo

$$am^{o}\,.\,bm^{\prime}.\,cm^{\prime\prime}=am^{o}+\frac{bm^{o}}{6}+\frac{cm^{o}}{72}$$

$$an'.2bn''.2cn''' = \frac{an^o}{6} + \frac{bn^o}{6.6} + \frac{nc^o}{6.72}$$

$$ap''.2bp''':2cp'''' = \frac{ap^o}{72} + \frac{bp^o}{6.72} + \frac{cp^o}{72.72}$$

Exemplum. 1)

$5^o\ 4'\ 3''$	Est enim
$3^o\ 2'\ 0''$	$5^o\ 4'\ 3''$
$15^o\ 12,\ 9''$	$3^o\ 2' = 3^o + \frac{1^o}{3}$
$10.16.12'''$	
$19^o\ 0,\ 2''\ 0'''$	$15^o\ 12'.\ 9''$ ex 3°
	$1\quad 5.\ 5$ ex $\frac{1^o}{3}$
	$19^o.\ 0'.\ 2''.$

2)

$4^o\ 4'\ 6''$	Est enim
$2^o\ 3'\ 0''$	$4^o\ 4'\ 6''$
$8^o\ 8'\ 12''$	$2^o\ 3' = 2^o + \frac{1^o}{2}$
$12.24.36'''$	
$8^o\ 20'\ 36''.\ 36'''$. seu	$8^o\ 8'\ 12''$.prod. ex 2°
$11^o\ 5'\ 3''\ 0'''$.	$2.\quad 2\ 3$ item ex $\frac{1^o}{2}$.
	$11^o.\ 5'\ 3''$ prod. totum.

§. 124. *Problema.* Multiplicare decempedas, pedes, digitos, et lineas, per decempedas. pedes, digitos et lineas (juxta subdivisionem geometricam).

Resolutio. 1) In multiplicatione ejusmodi quantitatum vel quanta sit dimensio aliquoties sumpta quaeritur; atque tum more vulgari proceditur.

E. g. Milites in tres ſeries diſpoſiti occupant $954^{0}\ 9'\ 6''$; quantum ſpatium occupabunt, ſi una ſerie conſiſtant? Erit

$$\begin{array}{r} 954^{0}\ 9'6'' \\ 3 \\ \hline 2864^{0}\ 8'8''. \end{array}$$

Nam $(954^{0} + 9' + 6'') \times 3 = 954^{0} \times 3 + 9' \times 3 + 6'' \times 3 =$

$$\begin{array}{r} 954^{0}\ 9'6'' \\ 3 \\ \hline 18'' \\ 27' \\ 2862^{0} \\ \hline 2864^{0}\ 8'8''. \end{array}$$

Vel etiam $954^{0}\ 9'6'' = 95496''$, et ducti in

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 286488'' \end{array}$$

et reducti dabunt $2864^{0}\ 8'8''$, quia per 10 dividendo quaevis ſpecies minor ad majorem reducitur.

2) Vel longitudines per alias multiplicantur, ac tum numeri quadrati emergunt, vel ſuperficies ducuntur in longitudines, atque tunc cubici emergunt numeri. In utroque caſu ſequentia obſervantur.

a) Si ejusdem denominationis partes uterque habet factor: more vulgari multiplica, et a dextris producti tot claſſes reſeca, quot virgulas habet poſtrema nota factorum, in quadratis duae, in cubicis tres notae uni claſſi tribuendae, reſiduae notae quadratas vel cubicas decempedas indicabunt. *Exempla*.

Sit ager $275^{o}\ 3'\ 6''$ longus
$242^{o}\ 8'\ 3''$ latus; quot continet quadratas decempedas? Erit ergo

$275^{o}\ 3'\ 6''$
$242\ \ 8\ \ 3$

---

825 0 8
22028 8
55072
109144
55072

$66765^{o}\ .\ 66'.\ 8\ 8''$. Nam $275^{o}\ 1'\ 6'' = 27536'''$
$242^{o}\ 8'\ 3'' = 24283''$

Ergo $(275^{o}\ 3'\ 6'' \times 242^{o}\ 8'\ 3'') = 27536'' \times 24283''$

$$\text{Sed } 27536'' = \frac{27500^{o}}{100} + \frac{30^{o}}{100} + \frac{6^{o}}{100} = \frac{27536^{o}}{100}$$

$$24283'' = \frac{24200^{o}}{100} + \frac{80^{o}}{100} + \frac{3^{o}}{100} \times \frac{24283}{100}.$$

$$\text{Ergo } 275^{o}3'6'' \times 242^{o}8'3'' = \frac{27536^{o}}{100} \times \frac{24283^{o}}{100}$$

$$\frac{667656688^{o}}{10000} = 66765^{o} + \frac{6600^{o}}{10000} + \frac{88}{10000} =$$

$6675^{o}\ 66'\ 88''$.

Sit $13^{o}\ 5'\ 6''$ Multiplicandus, et
$2^{o}\ 4'\ 2''$ Multiplicator. Erit

---

27 1 2
54 2 4
27 1 2

$32^{o}\ 8\ 1'\ 5\ \ 2'''$. Sunt enim

$$13^{o}\ 5'\ 6'' = \frac{1356^{o}}{10^{2}}$$

$$2^0\,4'\,2'' = \frac{242^0}{10^2}.\ \text{Ergo}\ \frac{1356^0}{10^2} \times \frac{242^0}{10^2} = \frac{1356 \times 242^0}{10^4} = \frac{328152^0}{10^4} = \frac{328152^0}{10000} = 32^0 + \frac{8100}{10000} + \frac{52}{10000} = 32^0\,81'\,52''.$$

Sit receptaculum aquarum $2^0\,4'$ longum, $1^0\,8'$ latum, $1^0\,2'$ profundum, quot continet pedes cubicos aquae? Ducatur longitudo in latitudinem, et habeatur superficies, et haec per profunditatem multiplicetur.

Ergo $2^0\,4' =$	$24'$
$1^0\,8' =$	$18'$
19 2	
2 4	$432{:}100 = 4^0\,\frac{32}{100} = 4^0\,32'$.
$4^0\,3\,2'$. Et	Et $4^0\,32' = 432'$ (quadrati)
$1^0\,2'$	$1^0\,2' = 12'$ (simplices)
8 6 4	Ergo $\frac{431^0}{100} \times \frac{12^0}{10} = \frac{5184^0}{1000}$
4 3 2	
$5^0\,1\,8\,4'$	$= \frac{5000^0}{1000} + \frac{184}{1000} = 5^0\,184'$, cubicis.

Sit longitudo = $3^\circ\ 4'\ 1''$
latitudo = $2^\circ\ 3'\ 2''$; erit productum in quadratis

6 8 2
10 2 3
68 2

$7^\circ\ 9\ 1'\ 1\ 2 = 79112 : 10000.$

Sit profunditas $3^\circ\ 2'\ 1'' = 321 ; 100$

7 9 1 1 2
15 8 2 2 4
237 3 3 6

$25^\circ 3\ 9\ 4'\ 9\ 5\ 2''$. Sunt enim

$$\frac{79112}{10000} \times \frac{321}{100} = \frac{25394952^\circ}{1000000} = \frac{25000000^\circ}{1000000}$$

$$+ \frac{394000^\circ}{1000000} + \frac{932^\circ}{1000000} = 25^\circ 394' 952'' \text{cub.}$$

b) Si vero non ſint ejusdem denominationis, partium, quae deſunt, loco adſcribe zeros, et priori modo operare, E. gr,

Detur longitudo $3^\circ\ 7''$, latitudo $2^\circ\ 4'$, quanta eſt ſuperſicies?

$3^\circ\ 0'\ 7'' =$ | $307''$
$2\ 4\ 0''$ | $240''$

12 2 8 0
6 1 4

$7^\circ 36'\ 8\ 0''$

$73680^\circ : 10000$. Id eſt

$$\frac{70000^\circ}{10000} + \frac{3600}{10000} + \frac{80}{10000}.$$

Sit superficies corporis $= 3^{0}\ 22'$; altitudo $5'\ 3''$; quanta est crassities?

Erit ergo $3^{0}22'00'' =$
$53'' =$

$$\begin{array}{r} 9\ 66\ 00 \\ 1\ 6\ 1\ \ 00\ 0 \\ \hline 1^{0}7\ 0\ \ 6'6\ 00'' \end{array}$$

$32200''$
$53''$. Et quadrati

$32200'' = \frac{32200^{0}}{10000}$; simpl.

$53'' = \frac{53^{0}}{100}$. Ergo

$\frac{32200^{0}}{10000} \times \frac{53^{0}}{100} =$

$\frac{1706600^{0}}{1000000} = 1^{0}706'600''$

cubicis.

Sit longitudo $= 3^{0}\ 3' = \frac{33^{0}}{10}$

latitudo $= 2^{0}\ 0' = \frac{20^{0}}{10}$

$$6^{0}\ 6\ 0' = \frac{33 \times 20^{0}}{100} = \frac{660^{0}}{100} = \frac{600^{0}}{100} + \frac{60^{0}}{100}.$$

sit profundit. $3^{0}\ 0' = \frac{30^{0}}{10}$.

$19^{0}\ 8\ 00'$ cubicis.

Nam $\frac{660^{0}}{100} \times \frac{30^{0}}{10} = \frac{660 \times 30^{0}}{1000} = \frac{19800^{0}}{1000} =$

$\frac{19000^{0}}{1000} + \frac{800^{0}}{1000} = 19^{0}\ 800'$ cubicis.

Scholion. Confer haec cum doctrina de fractionibus decimalibus et potentiis.

Caput IV.

De Divisione in numeris mixtis heterogeneis.

§. 125. Quoniam productum semper cum uno ex factoribus homogeneum est, idcirco quotus cum dividendo homogeneus vel heterogeneus esse debet, prout divisor cum illo heterogeneus vel homogeneus fuerit. Si v. gr. 5 orgiae 30 fl. constant; 1 orgia constat 5ta parte de 30 fl. ergo $\frac{30}{5}$ fl. = 6 florenis.

Si 6 fl. 30 orgiae emuntur; uno fl. emitur 6ta pars de 30 orgiis, ergo $\frac{30^{\circ}}{6}$ = 5 orgiis.

A) Si autem 6 fl. 1 orgiam dant; 30 fl. toties unam orgiam dabunt, quoties 6 fl. in 30 continentur, ergo $\frac{30}{6}$ fl. = 5 orgiis. Et

B) Si denique 5 orgiae 1 fl. venduntur; 30 orgiae toties 1 fl. constabunt, quoties 5 orgiae in 30 orgiis contentae sunt, ergo $\frac{30^{\circ}}{5^{\circ}}$ = 6 floren.

Scholion. Bene attendendum ad ea, quae (§. 34. Cor. 7. Arith. Elem.) dicta erant. Cum dividendus productum, quotus unum factorem, et divisor alterum repraesentet; dividendus ac quotus homogenei sunt, possuntque quaelibet magnitudo esse, divisor vero semper numerus esse debet.

Qualitas quoti semper ex natura quaestionis discernenda est. Quaevis regula trium inversa

poteſt in directam converti, id eſt: quaevis quaeſtio directa, poteſt indirecte proponi, ut in ambobus caſibus poſtremis. Nam in *A* erit

6 fl. : 30 fl. $=$ $1^o : x^o$; ergo

$$\frac{30 \text{ fl.} \times 1^o}{6 \text{ fl.}} = \frac{30^o}{6} = 5 \text{ orgiis.}$$ Et in *B*.

$5^o : 30^o = 1$ fl. : x fl. ergo erit

$$\frac{30^o \times 1 \text{ fl.}}{5^o} = \frac{30}{6} \text{ fl.} = 6 \text{ flor.}$$ Ergo §phi. 34. Cor. 2. valet.

§. 126. *Diviſio* in numeris, qui ex integris, et diverſis partibus unitatis mixti ſunt, nihil ſingularis habet. Nam quodſi quotus cum dividendo homogeneus ſit; integra dividendi per integra diviſoris diviſa dant numerum integrorum quoti, et haec toties ſumpta, quot unitates diviſor continet, et a dividendo ſubtracta, dant primum reſiduum, quod iterum per integra diviſoris diviſum numerum partium altiſſimarum quoti dat, et ſic porro.

Quodſi vero diviſor cum dividendo ſit homogeneus; iterum integra dividendi per integra diviſoris diviſa dant numerum integrorum quoti, et diviſor toties ſumptus, quot unitates quotus inventus continet, et a dividendo ſubtractus, dat primum reſiduum, quod per denominatorem partium altiſſimarum quoti multiplicatum et rurſus per integra diviſoris diviſum numerum altiſſimarum partium quoti dat, et ita porro. Haec eſt Methodus prima. Altera Methodus in eo conſiſtit: ut in quovis caſu quotus in forma fractionis exprimatur: numerator et denominator ejusdem tam diu per eundem numerum multiplicetur, donec uterque

ex folis integris numeris conftet, et tunc demum ille per hunc dividatur.

Exempla. 1) Si 7° 4′ 3″ conftant 16 flor. 11 crucif. 2 hallens.; quanti conftat 1°. Erit operatio hæc:

Divifor	Dividendus	Quotus
7° 4′ 3″	16 flor. 11 cruc. 2 hall.	2 fl. 6 cruc.
vel		
$7^\circ + \frac{2^\circ}{3} + \frac{1^\circ}{24}$	o. 5 cruc. prod. ex 2 flor. in 3″	
	o. 80 cruc. prod. ex 2 flor. in 4′	
	14 fl. o. cruc. prod. ex 2 flor. in 7°	
	15 fl. 25 cruc. o. prod. 2 fl. in 7° 4′ 3″.	
	o fl. 46. cruc. 2. hall. = refiduo 1mo	
	o. 2. prod. ex 6. cr. in 3″	
	4. o. prod. ex 6. cr. in 4′	
	42. o. prod. ex 6. cr. in 7°	
	o. 46. 2 = 6 cruc. × 7° 4′ 3″	
	o = refiduo.	

Vel fecundum methodum alteram:

$$\frac{(16 \text{ flor. } 11 \text{ cruc. } 2 \text{ hall.})4}{(7^\circ\ 4'\ 3'')4} = \frac{64 \text{ fl. } 44 \text{ cruc. } 8 \text{ hall.}}{28^\circ\ 16'\ 12''}$$

$$= \frac{(64 \text{ fl. } 45 \text{ cr.})6}{(30^\circ\ 5')6} = \frac{(388 \text{ fl. } 30 \text{ cruc.})2}{(185^\circ)2} = \frac{777 \text{ fl.}}{370^\circ} =$$

777 fl. : 370 = 2 fl. 6 cruc.
740
37 fl. = 2220 cruc.
2220
0.

2) $\frac{\text{34 fl. 2 cruc. 4 hall.}}{3^{\circ}\ 3'\ 6''.}$ *Operatio.*

Divisor		Quotus
$3^{\circ}\ 3'\ 6''$ vel $3^{\circ} + \frac{1^{\circ}}{2} + \frac{1^{\circ}}{12}$	34 fl. 2 cr. 4 hall.	9 fl. 30 cr.
	45 cr. product. ex 9 fl. in $6''$	
	4 fl. 30 cr. product. ex 9 fl. in $3'$	
	27 fl. 0 cr. product, ex 9 fl. in 3°	

32 fl. 15 cr. prod. ex 9 fl. in $3^{\circ}\ 3'\ 6''$.

1 fl. $47\frac{1}{2}$ cr. = $107\frac{1}{2}$ = residuo 1mo

$2\frac{1}{2}$ cr. prod. ex 30 cr. in $6''$

15 cr. prod. ex 30 cr. in $3'$

90 cr. prod. ex 30 cr. in 3°.

$107\frac{1}{2}$ = prod. ex 30 cr. in $3^{\circ}\ 3'\ 3'\ 6''$

0 = residuo 2do.

Vel juxta alteram methodum: $\frac{\text{(34 fl. 2 cr. 4 hall.) 2}}{(3^{\circ}\ 3'\ 6'')\ 2}$

$= \frac{\text{68 fl. 4 cr. 8 hall.}}{6^{\circ}\ 6'\ 12''} = \left(\frac{\text{68 fl. 5 cruc.}}{(7^{\circ}\ 1')6}\right)6 =$

$\left(\frac{\text{408 fl. 30 cruc.}}{43^{\circ} \times 2}\right)2 = \frac{\text{817 fl.}}{86}$ — 817 fl : 86 =

9 fl. 30 cruc.

3) Si 3 fl. 12 cruc. 7 hall. 1 orgiam dant; dabunt 44 fl. 44 cr. $1\frac{5}{12}$ hall. juxta methodum primam:

Divisor	Dividendus	Quotus
3 fl. 12 cr. 7 hall.	44 fl. 44 cr. $1\frac{5}{12}$ hall.	$13^{\circ}\ 5'\ 6'$.

o. o. 91 h. = $13^{\circ} \times 7$ hal.
o. 156 o. = $13^{\circ} \times 12$ cr
39. o. o. = $13^{\circ} \times 3$ fl,

39. fl. 156 cr. 91 hall. vel
41 fl. 47 cr. 3 hall. = $13^{\circ} \times$
3 fl. 12 cr. 7 hall.

2 fl. 56 cr. $6\frac{5}{12}$ hall. = residuo
primo.
17. 40. $6\frac{1}{2}$ = residuo primo
$\times 6$ (quia orgiae in quoto).
o. o. 35 hall. = ex $5'$ in
7 hall.
o. 60. o = prod. ex $5'$ in
12 cruc.
15. o. o = pr. ex $5'$ in 3 fl.

15. 60. 35 = hall. = seu
16. 4. 3 = $5'$ in 3 flor.
12 cr. 7 hall.

1. 36. $3\frac{1}{2}$ = residuo 2do.
19. 17. 2 = residuo 2do
$\times 12$ (quia digiti in quoto).
o. o. 42 = prod. ex $6''$
in 7 hall.
o. 72. o = prod. ex $6''$
in 12 cruc.
18. o. o = prod. ex $6''$
in 3 fl.

18. 72. 42. hall.: seu
19 fl. 17 cr. 2 hall. = $6''$ in 3 fl.
12 cruc. 7 hall.

o = residuo tertio.

Schol. Si data quaestio bene consideratur; erit quoto in proportionem resoluto:

(3 fl. 12 cruc. 7 hall.) : (44 fl. 44 cruc. $1\frac{5}{12}$ hall.) = $1^{\circ} : x^{\circ}$. Ergo $x^{\circ} = \dfrac{44 \text{ fl. } 44 \text{ cruc. } 1\frac{5}{12} \text{ hall.}}{3 \text{ fl. } 12 \text{ cruc. } 7 \text{ hall.}}$

Ex quo facile colligitur, quotum debere esse in orgiis, vel 1° duci debere in 44 fl. tum in $\frac{44}{60}$ fl., postea in $\left(\frac{17}{12.8} \times \frac{1}{60}\right)$ fl.; et id per 3 fl. 12 cruc. 7 hall. dividi. Ergo esset etiam $x^{\circ} = \left(\dfrac{44 \text{ fl. } 44 \text{ cruc. } 1\frac{5}{12} \text{ hall.}}{3 \text{ fl. } 12 \text{ cruc. } 7 \text{ hall.}}\right)^{\circ}$; ubi divisor ut numerus considerari debet. Posset ergo dividendus et divisor ad minimam speciem reduci, dividi et tum quotus in orgiis etc., exprimi, Et esset $x^{\circ} =$ $\dfrac{44 \text{ fl. } 44 \text{ cruc. } 1\frac{5}{12} \text{ hall.}}{3 \text{ fl. } 12 \text{ cruc. } 7 \text{ hall.}} = \left(\dfrac{21473\frac{5}{12}}{1543}\right)^{\circ}$.

Hinc 1543 | $21473 + \frac{5}{12}$ | $13^{\circ}\ 5'\ 6''$

1543

6043

4629

$(1414 + \frac{5}{12})^{\circ} \times 6$

$(8486\frac{1}{2})'$

7715

$(771\frac{1}{2})' \times 12$

$9258''$

9258

0.

In casu tali ergo, in quo dividendus et divisor homogenei sunt, possunt ambo ad minimam speciem reduci, vel ut numeri considerari, et tunc dividi, quotus erit qualitatis notae, vel ex quaestione determinandae.

4) $\left(\frac{11^\circ\ 1'\ 6''}{2\ \text{fl.}\ 30\ \text{cr.}}\right)\frac{4}{4} = \frac{45^\circ}{10\ \text{fl.}} = 4^\circ\,\frac{5}{10} = 4^\circ\ 3'$.

5) $\frac{(34\ \text{fl.}\ 50\ \text{cruc.})\,3}{(3^\circ.\ 4')\,3} = \frac{209\ \text{fl.}}{22} = 9\ \text{fl.}\ 30\ \text{cruc.}$

Schol. Posset etiam solus dividendus in exemplis allatis ad minimam speciem reduci, dividi, et tunc quotus ad majores species reduci. Ut

$$\frac{11^\circ\ 1'\ 6''}{2\ \text{fl.}\ 30\ \text{cr.}} = \frac{(810'')\,2}{(2\ \text{fl.}\ 30\ \text{cr.})\,2} = \frac{1620''}{5\ \text{fl.}} = 324'' =$$

$$\frac{324'}{12} = 27' = \frac{27^\circ}{6} = 4^\circ\ 3'.$$

6) $\frac{(25^\circ\ 1'\ 1''\ 6''')\,8}{(3^\circ\ 4'\ 8'')\,8} = \frac{(201^\circ\ 3')\,6}{(21^\circ\ 4')\,6} = \frac{1209}{130}$ flor.
$= 9$ fl. 18 cruc.

§. 127. *Problema.* Dividere decempedas, pedes, digitos, et lineas.

Resolutio. In divisione cum ejusmodi numeris, vel dimensiones in partes aequales dividuntur, vel latus aut superficies quaeritur.

a) Cum dimensionum fit divisio: more vulgari proceditur. E. g.

Sit linea $465^\circ\ 8'\ 5''$ in quinque partes dividenda, quanta unius partis longitudo?

5 | 465° 8′ 5″ | 93° 1′ 7″
45
———
15
15
———
8′
5
———
35″
35
———
0.

Sunt enim $\frac{465^\circ\ 8'\ 5''}{5} = \frac{46585''}{5} = 9317'' = 93^\circ$ 1′ 7″, quia per 10 dividendo ſpecies minor ad majorem reducitur.

Sit ager = 3570° 66′ inter tres haeredes dividendus, quantum obveniet uni?

3 | 3570° 66′
3
———
5
3
———
27
27
———
0
0
———
6
6
———
6
6
———
0.

1190° 22′. Nam $\frac{3570^\circ\ 66'}{3} = \frac{357066'}{3}$ quadratis = 119022′ quadratis.
Sed 119022′ quadrati dant dividendo per 100 = 1190° 22′. Eſt enim $\frac{119022}{100} = \frac{119000}{100} + \frac{22}{100} =$ 1190° 22′.

b) Cum latus quaeritur, ſi diviſor et dividendus ejusdem denominationis habet partes: ut in vulgari proceditur, et quoti notae eodem virgularum numero, quem habent claſſes dividendi, ſignantur. E. g.

8° 4′	21° 84′	2° 6′.
	16 8	
	5 04	
	5 04	
	0.	

Nam $\frac{21\ 84^\circ}{100} : \frac{84^\circ}{10} = \frac{2184 \times 10}{84' \times 100}$ $= \frac{2184^\circ}{84^\circ} \times \frac{1}{10} = \frac{2184^\circ}{84} : 10.$

Fiat ergo diviſio more vulgari, et tum quotus adhuc per 10 dividendus, id eſt, reducendus in ſpecies majores ſimplices.

Item $\frac{200^\circ\ 88'}{5^\circ\ 4'} = 37^\circ\ 2'$. Nam $200^\circ\ 88' =$ $\frac{20088^\circ}{100}$ et $5^\circ\ 4' = \frac{54^\circ}{10}$. Ergo $\frac{200^\circ\ 88'}{5^\circ\ 4'} =$

$$\frac{20088^\circ}{100} \times \frac{10}{54^\circ} = \frac{20088^\circ \times 10}{54^\circ \times 100} = \frac{20088^\circ}{54} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{20088^\circ}{54} : 10 = \frac{372^\circ}{10} = 37^\circ + \frac{2^\circ}{10} = 37^\circ\ 2'.$$

c) Cum ſuperficies quaeritur: quoti claſſibus ſigna claſſium dividendi inſcribuntur. E. g.

$$
\begin{array}{r|l}
4^{\circ}\,2' & 175^{\circ}\,728' \;\big|\; 41^{\circ}\,84'. \\
 & 168 \\ \hline
 & \;\;77 \\
 & \;\;42 \\ \hline
 & \;\;352 \\
 & \;\;336 \\ \hline
 & \;\;\;\;168 \\
 & \;\;\;\;168 \\ \hline
 & \;\;\;\;\;\;0.
\end{array}
$$

Sunt enim

$$\frac{175^{\circ}\,728'}{4^{\circ}\,2'} = \frac{175728^{\circ}}{1000} : \frac{42^{\circ}}{10} = \frac{175728^{\circ}\times 10}{42^{\circ}\times 1000} = \frac{175728^{\circ}}{42}\times\frac{1}{100} = \frac{4184^{\circ}}{100} = 41^{\circ}\,\frac{84^{\circ}}{100}$$

$= 41^{\circ}\,84'$ quadratis.

d) Si vero ſint diverſae denominationis: idem fit, quod in multiplicatione (§. 124. b.), et tum diviſio more ſolito peragitur. E. g. Sint $2^{\circ}\,6'\,40''$ dividendae per $8^{\circ}\,6'$. Erit

$$
\begin{array}{r|l}
8^{\circ}6'0'' & 2^{\circ}\;06'40'' \;\big|\; 2'4'' = 0^{\circ}\;2'4''. \\
 & 1\;\;72\;\;0 \\ \hline
 & \;\;3440 \\
 & \;\;3440 \\ \hline
 & \;\;\;\;0.
\end{array}
$$

Nam $\frac{2^{\circ}06'40''}{8^{\circ}6'} = \frac{20640^{\circ}}{10000} : \frac{860^{\circ}}{100} = \frac{20640\times 100}{860\times 10000}$

$= 24^{\circ}\times\frac{1}{100} = \frac{24^{\circ}}{100} = \frac{20^{\circ}}{100} + \frac{4^{\circ}}{100} = \frac{2^{\circ}}{10} +$

$\frac{4^{\circ}}{100} = 0^{\circ}\,2'4''$. Et $8^{\circ}\,6'\times 2'4'' = 2^{\circ}\,06'40''$.

Schol. In extractione radicis ex iſtius modi quantitatibus unum obſervandum venit: ut quo numero virgularum dextima claſſis, et reliquae notae ſunt, eodem dextima, et ſequentes notae radicis ſignentur (vide §. 107.).

Sectio Quarta.

De Aequationibus seu de Algebra in sensu proprio vel stricto.

Caput I.

De Praecipuis Analyseos Operationibus.

§. 128. Doctrina de aequationibus, ab Arabibus ad nos devecta, et a Recentioribus amplificata dicitur illa pars Analyseos finitorum, quae in proprietates et affectiones diversi generis aequationum inquirit, atque eas edocet et pertractat operationes analyseos, quarum ope problemata quaevis mathematica resolvi possunt. Qua de caussa etiam Analysis *methodus resolvendi* problemata mathematica nuncupatur.

Est autem *aequatio* diversa expressio ejusdem quantitatis, seu ejusdem valoris.

Hae jam diversae expressiones quantitatis (vel valoris) ejusdem, constant et efficiuntur ex diversis exprimendi et determinandi modis (speciebus) ut: additione, subtractione, multiplicatione, et divisione, elevatione ad potentiam, extractione radicis, commutatione signorum ambarum, logarithmis etc. Omnis enim quantitas (id est ejus valor) immutata manet, si cum illa, vel in illius valore mutationes sibi oppositae efficiantur, hoc est, si illi aliquid additur, et idem rursus subtrahitur, si per aliquid multiplicatur, et rursus dividitur, ad potentiam aliquam elevatur, et rursus similis radix extrahitur, etc.

§. 129. Dum quantitas quaepiam diversa expressione designatur, vel diverso modo exprimitur; illius valor tamen immutatus manet, et tunc affirmari potest: expressio una aequatur alteri, ambae eundem habent valorem, idem repraesentant, significant. Quodsi igitur *a* tantundem sit, ac *x*; erit etiam x = a; et a = x.

Quaevis aequatio *duas* obtinet *partes*, vel *duobus* constat *membris*, quia est duplex expressio ejusdem quantitatis. Utraque pars (utrumque membrum) ex uno vel pluribus terminis constituta esse potest, qui *termini aequationis* dicuntur, prout nempe una vel plures literae vel cyfrae quantitatem repraesentant; atque hae aequali vel diversa designatione denotantur.

§. 130. Quantitates cognitae (cogniti valores) designantur primis, incognitae posterioribus Alphabeti literis, more solito per *x*, *y*, *z*. Quamvis quantitas quaevis (litera) in aequatione incognita statui possit.

§. 131. Quoniam modi computandi eo tendunt ut inveniantur quaesita et quaerenda, vel ut expressio nondum determinata determinetur, certum significatum (valorem) obtineat; hinc prima regula aequationis (operationis analyseos) haec est: aequatio quantum fieri potest, ad expressiones determinatas est reducenda. Et cum expressio simplicissima etiam maxime determinata, optime cognoscibilis sit; ante omnia studendum, ut aequatio (termini ejus) ad expressiones simplicissimas et quam plurimum agnoscendas reducatur.

Si itaque e datis, vel cognitis quibusdam quantitatibus incognita detegitur, id est, cumprimum in uno membro aequationis solitaria sit locata,

et reliquae cognitae omnes in altero membro ejusdem, aequatio *resoluta* et *reducta* est. Tunc quantitas incognita per meras cognitas, adeoque agnoscibiles expressiones repraesentata est; et cum una expressio alteri aequatur, itaque modo quantitas ipsa cognita erit, antea adhuc incognita.

Resolvere aequationem ergo idem erit, quod invenire incognitam e cognitis.

§. 132. Quodsi quaecunque expressiones a et x eundem habeant valorem; erit $a = x$. Et addito utrinque aequali, est: $2 = 2$

$$\text{Summa } a + 2 = x + 2 \text{ summae.}$$

Ab utroque aequali dempto est:

$$a = x$$
$$-2 = 2$$
$$-$$

$$\text{differentia } a - 2 = x - 2 \text{ differentiae.}$$

Utroque per idem multiplicato, est: $a = x$
$2 = 2$

$$\text{productum } 2a = 2x \text{ facto.}$$

Utroque per aequale diviso, est: $a = x$
$2 = 2$

$$\text{Quotus } \frac{a}{2} = \frac{x}{2} \text{ quoto.}$$

Utroque ad eandem potentiam (n) elevato, est:

$$a = x$$

$$a^n = x^n$$

Ex utroque aequali radice (n)tesima extracta, est:

$$\frac{a = x}{\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x}}.$$

Et vicissim, utroque membro per n multiplicato; cum $\frac{a}{n} = \frac{x}{n}$; erit $a = x$. Utroque per n diviso: cum $na = nx$; erit $a = x$. Utrinque aequali subtracto; cum $a + n = x + n$; erit $a = x$. Utrinque aequali addito: cum $a - n = x - n$; erit $a = x$. Eadem radice extracta: cum $a^n = x^n$; erit $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{x^n}$, seu $a = x$.

Si itaque duae expressiones eundem habuerint valorem; valor hic immutatus manebit: si hae ambae expressiones mutationes aequales subeant.

Verum mutationes, quas ambae expressiones quantitatis ejusdem, vel membra aequationis ambo subire possunt, consistunt in operationibus analyseos; igitur valor expressionum duarum ejusdem quantitatis, vel valor utriusque membri, ergo aequatio ipsa non mutatur: si in ambobus membris aequationis aequales operationes instituantur, si utrique membro aequationis aequalia addantur, vel ab utroque aequalia subtrahantur; si utrumque per aequalia multiplicatur, aut dividitur; si utrumque ad eandem potentiam elevatur, vel ex utroque radix extrahatur similis.

§. 133. Leges ergo resolvendarum aequationum idem habent fundamentum, cui Mathesis universa innititur.

Nempe ad resolvendam aequationem, inveniendam incognitam, id est transferendam in unam

partem, et reliquas cognitas quantitates in alteram, id est ad reductionem aequationis ad unum terminum incognitum et solitarium, praedicta axiomata ducunt brevissima via. Nam quodsi *incognitae* quantitati adhaereant vel conjunctae sint *cognitae*

per additionem; has separo ab illa, si cognitas ab signo + utroque membro aequationis subtraho;

per subtractionem; has separo ab illa, si cognitae signo — in utraque parte aequationis addantur;

per multiplicationem; hae ab illa separantur, si signo × vel ut factores ambae partes aequationis per cognitas multiplicantur.

Simili modo ac ratione potentiae aequales, radices aequales; et aequales radices, aequales potentias dent necesse est.

Coroll. Quantitates itaque cognitae additae subtrahendo; subtractae addendo ab incognita separantur; ut factores conjunctae dividendo, et ut divisores conjunctae multiplicando ab incognita sejunguntur.

§. 134. *Theorema.* Reductio aequationis fit per mox commemoratas separationes et transpositiones cognitarum ab incognita, id est per oppositas operationes in terminis utriusque membri aequationis. V. g. Sit cognita quaecunque incognitae adjuncta per additionem; erit

$x + a = b$. Et subtracto utrinque *a*, est:

$\quad - a = - a$.

$x = b - a$. Ubi *a* negativum fit.

Sit cognita conjuncta per ſubtractionem (cum ſigno —); erit

$x - a = b$; et utrinque addendo (a); eſt:

$+ a = + a$

$x = b + a$. Ubi *a* poſitivum fit.

Sit cognita alligata tanquam factor; erit $ax = b$; et dividendo utrumque membrum per *a*, eſt:

$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$, ſeu $x = \frac{b}{a}$. Ubi *a* diviſor fit.

Sit cognita conjuncta per diviſionem ut diviſor vel denominator; erit

$\frac{x}{a} = b$; et utroque membro per *a* multiplicato, eſt;

$\frac{x}{a} \times a = b \times a$; ſeu $x = ab$. Ubi *a* factor.

Cum $a^n = x^n$; erit $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x}$.

Cum $a^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{n}}$; erit $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{x}$; et $a = x$.

Demonſtratio. Si aequalibus aequalia addantur, aut ab illis ſubducantur, ſi aequalia per idem multiplicantur, aut dividantur; ſummae, differentiae, facta et quoti ſibi aequari debent. Atqui membra aequationis ſunt aequalia; ergo etiam aequatio non turbatur: ſi in utroque membro ejusdem aequalis operatio perficiatur. Sed per has oppoſitas operationes aequatio ſimul ad unum terminum incognitum et ſolitarium, igitur rite reducta erit.

Coroll. 1. Quantitas in uno membro poſitiva, poteſt transferri in alterum ut negativa, et nega-

tiva ut poſitiva; factor ex uno membro poteſt in alterum ut diviſor, et diviſor in uno, ut factor in alterum transponi, quin hoc pacto aequalitas valorum mutetur.

Coroll. 2. Quodſi incognita pluribus quantitatibus cognitis ſit permixta, atque diverſo modo; quaevis harum ab illa ſeparatur per transpoſitionem in alterum membrum. Operatio tunc nequaquam diverſa, verum magis compoſita (complexior) evadit. Sit enim

1) $2x + a - b = 2b$. Erit utrinque *b* addito:

$$\begin{array}{rcl} 2x + a - b & = & 2b \\ +b & = & +b \\ \hline 2x + a & = & 3b \end{array}$$

$2x + a = 3b$; et utrinque *a* ſubtracto:

$$\begin{array}{rcl} 2x + a & = & 3b \\ -a & = & -a \\ \hline 2x & = & 3b - a \end{array}$$

$2x = 3b - a$; dividendo ambo membra per 2; $\frac{2x}{2} = \frac{3b-a}{2}$; ſeu $x = \frac{3b-a}{2}$,

2) $ab - ax = 2c + ax$. Erit

$$\begin{array}{rcl} ab - ax & = & 2c + ax \\ +ax & = & +ax \text{ (addendo)} \\ \hline ab & = & 2c + 2ax \end{array}$$

$ab = 2c + 2ax$; et

$$\begin{array}{rcl} -2c & = & -2c \text{ (ſubtracto):} \\ \hline ab - 2c & = & 2ax \end{array}$$

$ab - 2c = 2ax$; utrinque dividendo per $2a$; erit

$$\frac{ab - 2c}{2a} = \frac{2ax}{2a}, \text{ ſeu}$$

$$\frac{ab - 2c}{2a} = x.$$

3) Sit $\frac{x-a}{2} = b$. Erit ambo membra per 2 multipl.

$$\left(\frac{x-a}{2}\right)2 = 2b;$$ seu

$$x - a = 2b;$$ et utrinque *a* addendo:

$$\begin{array}{r} x - a = 2b \\ + a = + a \\ \hline x = 2b + a. \end{array}$$

Coroll. 3. Perinde est, quae quantitas ab incognita primum separetur. Interea usus edocet, operationem multo abbreviari, si quantitas incognita primum liberatur ab illis cognitis, quae illi per divisionem adhaerent, igitur a fractionibus; tum ab eis, quae illi per additionem vel subtractionem ergo signo (+) vel (—), et demum ab eis quae illi per multiplicationem, ergo ut factores adjunctae existunt.

Schol. 1. Bene autem attendendum, quaenam quantitas ab incognita sejungatur, et qua operatione, ne ulla pluries addatur, vel subtrahatur, nec etiam pauciores termini per illam multiplicentur vel dividantur, quam fieri debet. Nam cum quantitas aliqua in utroque membro addenda est, hoc tantum semel fieri debet; cum in utraque parte per quantitatem quamdam multiplicandum, vel dividendum, quivis terminus utriusque membri per illam multiplicari, aut dividi debet, secus aequatio immutata non manet.

Schol. 2. Ex his facile quoque intelligitur, quantitatem incognitam una positione inveniri posse, scilicet transponendo cognitas incognitae permixtas per oppositam (vel contrariam) operationem

in partem alteram aequationis. Ut in hac aequatione:

$$\frac{x}{3} - a + 2b = 7a, \text{ foret}$$

$$x = (7a + a - 2b)\,3 = (8a - 2b)\,3.$$

Verum, cum tyrones facile errorem committere possent sive in signis, sive in operatione ipsa; utilius erit, si ab initio quamque quantitatem separatim sejungunt, et transponunt, tum certi redduntur, se non tam temere erraturos.

Schol. 3. Quodsi incognita quantitas pluribus vicibus in forma fractionum compareat; optimum est, si fractiones primo ad communem denominatorem reducantur, tum addantur vel subtrahantur, et demum cognitae ab incognita transponantur. Ut, sit

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{5x}{7} = 20a; \text{ erit}$$

$$\frac{28x + 21x + 60x}{84} = 20.a; \text{ seu additis, et ductis}$$

in 84;

$$\frac{109x}{84} \times 84 = 20.a \times 84, \text{ seu}$$

$$109x = 1680.a; \text{ et}$$

$$\frac{109x}{109} = \frac{1680.a}{109}, \text{ id est:}$$

$$x = \frac{1680.a}{109}.$$

Schol. 4. Quodsi aequatio tandem ad eam expressionem reducta sit, in qua incognita in producto

ut factor occurit; productum hoc uno vel pluribus terminis constare potest. Cum productum uno constat termino: cognita est unus, et incognita alter factor illius; facile ergo dignoscitur, quomodo productum hoc in suos factores distinguendum sit. Quum autem productum pluribus constat terminis, cujus incognita quantitas factor est; tunc jam difficilius est factores ipsius invenire. In hoc postremo casu bene intendatur oportet, quomodo productum complexum oriri potuerit, et inquiratur, qualem alterum factorem esse oporteat, assumpta incognita pro uno factore. Prompta facultas secernendi factores magno hic commodo erit. E. g. Sit

1) $ax - b = bx - a$; erit

$+b = +b$

$ax = bx - a + b$; et

$-bx = -bx$

$ax - bx = b - a$. Sed factoribus expositis

$(a - b)x = b - a$; ergo dividendo per $(a - b)$ utrinque

$$\frac{(a-b)x}{a-b} = \frac{b-a}{a-b}; \text{ seu}$$

$$x = \frac{b-a}{a-b}.$$

2) Sit $ax - \frac{x}{2} = 2x + b$ Utrinque multiplicando per 2; erit

$$2ax - x = 4x + 2b; \text{ et subtractis}$$
$$-4x = -4x; \text{ erit}$$

$$2ax - 5x = 2b;$$ seu fact. exponendo:

$x(2a-5) = 2b$, et dividendo per $(2a-5)$ utrinque:

$$\frac{x(2a-5)}{2a-5} = \frac{2b}{2a-5}; \text{ ergo}$$

$$x = \frac{2b}{2a-5}.$$

3) Sit $ax - x = b - 2x + bx$. Erit

$$+2x = +2x$$

$$ax + x = b + bx; \text{ et}$$
$$-bx = -bx$$

$ax + x - bx = b$. Et factoribus designatis:

$x(a+1-b) = b$; ergo

$$\frac{x(a+1-b)}{a+1-b} = \frac{b}{a+1-b}, \text{ id est}$$

$$x = \frac{b}{a+1-b}.$$

§. 135. Cum jam perspectum habemus, quomodo aequatio data reducatur; etiam cupidi inveniendae seu describendae aequationis simus. Et hac in re non levis difficultas obvenit.

Aequationem autem describere vel *invenire* est, conditionibus problematis convenienter expressiones et terminos ita ordinare, ut inter illas et hos vera aequalitas intercedat.

Coroll. Igitur in describenda aequatione conditionibus problematis satisfaciendum, nec expressio una alteri ponenda, quae illi re vera non est aequalis, saltem sub positis conditionibus.

Quaenam autem dantur leges satisfaciendi conditionibus problemati adnexis, et quomodo est invenienda quaevis aequatio? Ut facilitas aequationes in quibusvis problematis inveniendi acquiratur, praeter acre ingenium longiori etiam exercitio opus est, atque ad statuendas problematis propositi ipsas aequationes, eis et tot scientiis opus est, quae et quot ad intelligendum nexum conditionum problemati adnexarum requiruntur. Ceterum nisi quis habeat doctrinam de proportionibus bene perspectam et apprehensam, magnam difficultatem in inveniendis nonnullis aequationibus inveniet,

§. 136. Quo inventio aequationum adjuvetur, nota sequentes propositiones.

Quodsi problema propositum unam duntaxat incognitam quaerendam involvat quantitatem; haec incognita litera x, et conditio problematis per *unam aequationem* exprimitur, et tum valor incognitae secundum regulas datas quaeritur, aequatio ergo reducitur.

In quibusdam problematis plures sunt incognitae, quippe cum plures involvant conditiones. In casu hoc investigandum est, utrum hae conditiones in unam reduci queant, an non. Quodsi conditiones problemati adnexae in unam reduci possint: una duntaxat incognita assumenda, quae tunc omnibus conditionibus congruit, igitur una duntaxat aequatio. Quodsi e contrario conditiones datae non possint ad unam reduci; tot erunt

incognitae, quot conditiones, et igitur etiam totidem aequationes.

Quodſi aliqua problematis conditio (quod ſaepius evenit), non aequationem, ſed aliquam proportionem in ſe contineat; ejusmodi proportio methodo ſuo loco tradenda in aequationem transformanda erit.

Caput II.

Problemata et Aequationes unius incognitae quantitatis.

§. 137. *Problema.* 1) Sit invenienda magnitudo, quae addita binario, et ſumma hac diviſa per 8, ipſi magnitudini aequalis ſit.

Reſolutio. Sit incognita $= x$; erit conditioni problematis congruenter $\frac{x+2}{8} = x$; et per 8 utrinque multiplicando, $\frac{(x+2)}{8} 8 = 8x$, ſeu

$$x+2 = 8x;$$
$$-x = -x$$

$$2 = 7x. \quad \text{Ergo } \frac{2}{7} = \frac{7x}{7} = x.$$

Examen. Eſt enim $(2+\frac{2}{7}):8 = \frac{16}{7}:8 = \frac{16}{7.8} = \frac{2}{7}$.

Problema. 2) Parens quidam relinquit 3 proles ex primo, et 3 ex altero matrimonio, et haereditatem $= 44000$ fl. Jure teſtamenti quaevis ex primo matrimonio ter tantum, quam una ex conjungio ſecundo accipere debet. Quantum cuique obvenit?

Resolutio. Proles una matrimonii secundi accipiat x; accipient omnes tres simul $x+x+x = 3x$. Proles ergo una primi matrimonii capit $3x$, et tres simul accipient $3x+3x+3x = 9x$. Sed haereditas prolium primi et secundi matrimonii $= 44000$. Vel $9x+3x = 44000$, seu

$$12x = 44000; \text{ et}$$

$$\frac{12x}{12} = \frac{44000}{12} = 3666\frac{2}{3};$$

ergo $x = 3666\frac{2}{3}$ flor. $=$ parti prolis matrimonii secundi. Proles ergo ex primo matrimonio accipiet $3666\frac{2}{3} \times 3 = 11000$ fl.

Problema. 3) Transfuga quidam interogatus, quantus esset exercitus suorum, respondit: se id nescire; verum in statione B* esse semissem, in statione G* trientem, et in F* residuam partem exercitus, aequalem 6000 militum. Quantus erat totus exercitus?

Resolutio. Totus exercitus sit $= x$; ejus semissis $= \frac{x}{2}$, ejus triens $= \frac{x}{2}$, et reliquum $= 6000$.

Igitur juxta conditionem probl. erit $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 6000 = x$: et reductis ad eundem denom.

$$\frac{3x+2x}{6} + 6000 = x; \text{ seu}$$

$$\frac{5x}{6} + 6000 = x. \text{ Multiplicando per } 6,$$

$$\frac{5x}{6} \times 6 + 36000 = 6x, \text{ id est:}$$

$$5x + 36000 = 6x, \text{ seu}$$
$$-5x \quad = -5x$$
$$36000 = x.$$

$$\frac{x}{2} = 18000$$
$$\frac{x}{3} = 12000 \quad 6000$$
$$\text{tot.} = 36000.$$

Problema. 4) Interogatus quidam de aetate ſua reſpondit: ſi alterum tantum haberem annorum quot modo habeo, tunc tot haberem ſupra centum, quot nunc infra 100 habeo. Quot ergo annos habuit?

Reſolutio. Sit x annorum; erit alterum tantum $= 2x$. Eſtque $100 - x = 2x - 100$. Et transponendo x et -100; erit $200 = 3x$. Ergo
$$\tfrac{200}{3} = x; \text{ atque}$$
$$66\tfrac{2}{3} = x.$$

Huic ſimile eſſet, ſi reſpondiſſet: et ſi ter tantum annos haberem, tot habiturus forem ſupra 100, quot nunc infra 100 habeo. Eſſet nempe $100 - x = 3x - 100$. Et
$$200 = 4x; \text{ ergo}$$
$$\tfrac{200}{4} = x. \text{ Et } 50 = x.$$

§. 138. *Problema.* 5) Summa duarum quantitatum ſit $= S$, differentia earumdem $= d$. Utraque ſit invenienda.

Reſolutio. Denominetur minor per x; erit major $= x + d$. Et ergo $x + x + d = S$; ſeu
$$2x + d = S; \text{ ſeu}$$
$$2x = S - d. \text{ Ergo}$$
$$x = \frac{S - d}{2} = \frac{S}{2} - \frac{d}{2} =$$
quantitati minori. Sed major $= x + d$. Ergo

fubftituto valore loco x; erit $x+d=\frac{S-d}{2}+d$.

Altero membro ad comm. denom. reducto: $x+d=\frac{S-d+2d}{2}$, feu $x+d=\frac{S+d}{2}=\frac{S}{2}+\frac{d}{2}$.

Inde fequens.

Theorema. Quantitas major femper eft aequalis femifummae plus femidifferentia, et minor aequatur femifummae dempta femidifferentia ipfarum.

§. 139. *Problema.* 6) Vinum de quo 1 menfurae pretium $=a$ cruciferis, alteri vino cujus 1 menfurae pretium $=b$ cruciferis, ita commifcendum eft, ut una menfura mixti q cruciferis vendi poffit. Quantum ergo de quovis fumendum erit?

Refolutio. Vini, cujus 1 menfura conftat a cruciferis, fumantur x menfurae; veniunt ergo ad unam menfuram de vino altero $(1-x)$ menfurae. Et pretium primi $=x\times a=ax$; alterius $=(1-x)b=b-bx$. Quare pretia menfurarum primi et alterius vel

$ax+b-bx=q$, (pretio mixti). Ergo

$ax-bx=q-b$; et factores exponendo

$(a-b)x=q-b$. Hinc

$\frac{(a-b)x}{a-b}=q-b$; feu

$x=\frac{q-b}{a-b}=$ menfuris primi. Sed

$1-x=1-\left(\frac{q-b}{a-b}\right)$. Altero membro ad comm.

denom. reducto, est: $1-x=\frac{a-b-(q-b)}{a-b}$

seu $1-x=\frac{a-b-q+b}{a-b}=\frac{a-q}{a-b}=$ mensuris alterius vini. Unde sequens

Theorema. Invenitur numerus mensurarum, de quovis dato vino alteri commiscendo sumendus: si differentia pretiorum amborum aliorum vinorum, per differentiam pretiorum datorum vinorum dividatur.

Scholion. Quoniam $x\times\frac{q-b}{a-b}$; et $1-x=\frac{a-q}{a-b}$; hinc $q>b$, et $q<a$ sit oportet; secus contra conditionem problematis pro x et pro $1-x$ valor negativus obtineretur.

Exemplum. Sit $a=20$; $b=8$; $q=16$. Erit $x=\frac{q-b}{a-b}=\frac{16-8}{20-8}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Et

$$1-x=\frac{a-q}{a-b}=\frac{20-16}{20-8}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}.$$

§. 140. *Problema.* 7) Pretium 1 mensurae vini generosi $=a$ crucifer, et 1 mensurae vilioris $=b$ crucifer. Ex his duabus speciebus sunt commiscendae n mensurae vini, ita ut una possit q cruciferis venire.

Resolutio. Quodsi de vino a cruciferis, x mensurae sumantur; constant hae $x\times a=ax$ cruciferis. Tunc jam de vino b crucifer. accipiendae erunt $(n-x)$ mensurae, et $(n-x)\times b$, dabit pretium vini b cruc. Hi duo valores au-

tem, vel $ax + (n - x) b$, debent aequari $q \times n$. Quare erit

$$ax + bn - bx = nq. \quad \text{Et}$$
$$ax - bx = nq - nb; \quad \text{et}$$
$$x(a - b) = nq - nb = n(q - b), \text{ seu}$$

$x = \frac{n(q-b)}{a-b}$. Ex hoc valore invenietur $n - x$

$$= n - \frac{(nq - nb)}{a-b} = n - \frac{nq + nb}{a-b}; \text{ seu } n - x$$

$$= \frac{an - nb - nq + nb}{a-b}; \text{ seu } n - x = \frac{an - nq}{a-b} =$$

$\frac{n(a-q)}{a-b}$. Inde sequens

Theorema. Quodsi plures mensurae vini mixti quaerantur; expressiones jam ex commemorato theoremate pro x et $(1 - x)$ inventae, praeterea per numerum mensurarum commiscendarum sunt multiplicandae.

Sit $a = 20$; $b = 8$; $q = 16$; $n = 30$. Erit

$$x = \left(\frac{16 - 8}{20 - 8}\right) 30 = \frac{8 \times 30}{12} = \frac{240}{12} = 20.$$

Et $n - x = 30 - 20 = 10$.

§. 141. *Problema.* 8) Ex duabus argenti speciebus cujus primae probitas sive lega sit a (a löthig), et alterius b (b löthig), sit miscenda 1 libra (1 Mark) sub lega q (q löthiges).

Resolutio. Partes primae speciei inveniendae sint $= x$ libris; restabit pro secunda $(1 - x)$. Hinc istae librae argenti sub lega a continent ax semiuncias argenti, et hae $(1 - x)$ librae argenti sub lega b, continent $(1 - x)\, b = b - bx$ semi-

uncias argenti. Mixtum jam argentum debet q semiuncias efficere. Itaque est: $ax+b-bx=q$. Et $ax-bx=q-b$, seu $(a-b)x=q-b$, et $x=\frac{q-b}{a-b}$. Atque $1-x=1-\frac{(q-b)}{a-b}=\frac{a-b-q+b}{a-b}$ seu $1-x=\frac{a-q}{a-b}$. Inde sequens

Theorema. Inveniuntur librae de quovis argento sumendae, si differentia semiunciarum utriusque alius argenti per differentiam semiunciarum utriusque dati argenti dividatur.

Coroll. Quodsi mixtio (n) librarum petatur; expressiones hae inventae adhuc per (n) sunt multiplicandae. Et erit $x=n\frac{(q-b)}{a-b}$; et $1-x=\frac{n(a-q)}{a-b}$.

Scholion. Simili methodo resolvuntur problemata quaequae dicta *mixtionis* sive *Aligationis*, dum metalla, frumentum, vina etc. diversae probitatis miscentur, eorumque valor intrinsecus aeque ac extrinsecus seu pretium augetur, vel minuitur.

§. 142. *Problema.* 9) Tabellarius, qui quotidie a milliaria conficit, jam ante (n) dies iter instituebat; alius vero $(n)^{mo}$ post die elapso idem iter instituit ex eodem loco, conficitque quotidie b milliaria. Quaeritur quoto die posterior priorem assequetur?

Resolutio. Sit dies concursus $=x$. Prior jam confecit $a\times n$ milliaria, et per x dies conficiet adhuc ax milliaria; posterior vero diebus x conficiet

bx milliaria ex conditione problematis. Erit igitur $an + ax = bx$; et $an = bx - ax$; ſeu $an = (b - a)x$; et $\frac{an}{b - a} = x$. Hinc ſequens

Theorema. Factum ex velocitate primi mobilis in tempus datum, et diviſum per differentiam velocitatum aequatur tempori concurſus.

Exemplum. Sit $a = 18$; $n = 5$; $b = 24$. Erit $x = \frac{18 \times 5}{24 - 18} = \frac{90}{6} = 15$.

Problema. 10) Viator ſingulis diebus conficit a milliaria; alius vero (b)*mo* poſt die elapſo idem iter ingreditur. Quaeritur quot milliaria abſolvere debeat poſterior, ut priorem (p) diebus aſſequatur?

Reſolutio. Sit iter diurnum alterius $= x$. Iter intra tempus elapſum, a primo confectum $= ab$. Iter intra tempus datum a primo confectum $= ap$. Et iter diurnum alterius conficiendum, ut priorem dato tempore aſſequatur $= px$. Hinc erit $ab + ap = px$. Ergo
$$a(b + p) = px, \text{ et}$$
$$\frac{a(b + b)}{p} = x.$$
Inde ſequens

Theorema. Factum ex velocitate primi mobilis in aggregatum temporum et diviſum per tempus datum aequatur velocitati mobilis ſecundi.

Exemplum. Sit $a = 18$; $b = 5$; $p = 15$. Erit $x = \frac{18 \times 5 + 18 \times 15}{15} = \frac{90}{15} + 18 = 6 + 18 = 24$.

Problema. 11) Dato intervalo locorum, ex quibus eodem tempore duo mobilia egrediuntur, una cum velocitate unius cujuslibet, invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent?

Resolutio. Sit intervalum locorum $= a$. Velocitas primi $= b$; secundi $= c$. Tempus occursus $= x$. Via a primo intra tempus x confecta $= bx$; via a secundo confecta $= cx$. Quare, cum ambo simul emensi sint totum intervallum locorum, unde egrediebantur, erit ex conditione problematis

$bx + cx = a$. Et

$(b + c)x = a$. Ergo

$x = \frac{a}{b + c}$. Inde sequens

Theorema. Quotiens ortus ex divisione intervalli per aggregatum velocitatum, est tempus quaesitum.

§. 143. *Problema.* 12) A quacunque quantitate $(\pm a)$ subtrahere aliam quamcunque $(\pm b \pm c)$.

Resolutio. Cum differentia $= d$ aequalis sit minuendo subtracto subtrahendo; erit

$(\pm a) - (\pm b \pm c) = d$. Et utrinque idem addendo:

$(\pm b \pm c) \qquad = (\pm b \pm c)$, erit

$(\pm a) + (\pm b \pm c) - (\pm b \pm c) = d + (\pm b \pm c)$, id est:

$(\pm a) = d \pm b \pm c$. Et transpositis ad alteram partem:

$(\pm a) \mp b \mp c = d$.

Porro. Sit a quantitate $(3a - nb + mc)$, subtrahenda quantitas $(2a - nb + mc)$. Erit

$(3a - nb + mc) - (2a - nb + mc) = d$. Ergo

$3a - nb + mc = d + (2a - nb + mc)$; seu

$3a - nb + mc = d + 2a - nb + mc$. Terminis ex altera parte in primam transpositis erit: $3a - nb + mc - 2a + nb - mc = d$; seu $a = d$. Hoc ita repraesentari potest:

$3a - nb + mc$. Minuendus.
$2a - nb + mc$. Subtrahendus. Ergo
$- \; + \; -$

$a = d =$ differentiae.

Coroll. In subtractione algebraica ergo in quovis termino subtrahendi signa in contraria sunt mutanda, et tum addendum.

Problema 13) Fractiones multiplicare, vel invenire factum duarum fractionum, vel $\frac{a}{b}$ ducere in $\frac{c}{d}$.

Resolutio. Sit $\frac{a}{b} = m$; et $\frac{c}{d} = n$. Productum earum $= x$. Erit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = x$. Sed cum $\frac{a}{b} = m$, erit $a = bm$; et etiam $c = dn$. Et si aequalia in aequalia ducantur, facta debent esse aequalia; ergo

$a = bm$
$c = dn$

$ac = bm \times dn = bd.mn$. Et dividendo per *bd*;

$\frac{ac}{bd} = \frac{bd.mn}{bd} = mn = x$. Seu factum ex fractio-

nibus = facto ex numeratoribus divifo per factum ex denominatoribus.

Problema 14) Fractiones dividere, vel invenire quotum duarum fractionum.

Refolutio. Divifor $= \frac{c}{d} = n$; dividendus $= \frac{a}{b}$ fit $= m$; quotus quaefitus $= x$. Erit

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x$. Sed $a = bm$, et $dn = c$; ergo etiam aequalibus in aequalia ductis: $(adn) = bcm$, feu $ad \times n = bc \times m$; ergo et

$$\frac{ad \times n}{n} = \frac{bc \times m}{n} = bc \times \frac{m}{n},$$

feu $ad = \frac{m}{n} \times bc$; hinc etiam

$$\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n} \frac{\times bc}{bc} = \frac{m}{n} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x.$$ Inde

Quotus duarum fractionum habetur; fi divifor invertatur, et tunc fractiones multiplicentur. Nam $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

§. 144. Quodfi conditiones problemati adnexae fub unicam reduci nequeant; plures incognitae affumi, et quaevis conditio rite denominata fingulari aequatione etiam exprimenda eft. Dantur ergo tunc tot aequationes, quot funt incognitae quaerendae. Dum duae adfunt incognitae quanti-

tates, duae etiam adesse debent aequationes, modo problema sit determinatum.

§. 145. Problema autem *determinatum* dicitur id, in quo tot singulae aequationes detegi et inveniri queunt, quot incognitae occurrunt; contra dicitur *indeterminatum*. In problemate determinato incognita quaevis unum duntaxat habere debet valorem, in indeterminato autem etiam plures et subinde indefinitos obtinere potest valores.

Scholion. Primum de determinatis problematis agemus, deinde de indeterminatis.

Caput III.

De Problematis resolvendis duas vel plures aequationes, et totidem incognitas involventibus, seu de transformandis Aequationibus.

§. 146. Resolvuntur autem problemata duas, vel plures incognitas quantitates comprehendentia per *transformationes plurium aequationum in unam.* quae vel per *Substitutionem*, vel per *Comparationem*, vel denique per *Algorithmum*, id est *ope* unius quatuor *specierum* efficitur.

Sunt ergo Substitutio, Comparatio, et quatuor species ipsaemet, modi resolvendi aequationes cum pluribus quantitatibus incognitis.

De Substitutione.

§. 147. *Substitutio* ea algebraica operatio est, qua in aequatione quapiam quantitas quaepiam deletur, et loco ipsius expressio aequivalens jam prius inventa ponitur, vel valor ejus substituitur. Haecce expressio autem eundem computandi modum (speciem eandem) obtineat oportet, quo quantitas gemina cum aequatione connexa erat.

Coroll. Substitutio omnis, vel modus exterminandi quantitatem incognitam per substitutionem valoris sui, innititur axiomati huic: *Aequalibus aequalia substitui possunt.*

§. 148. *Problema.* Resolvere aequationes duas cum duabus incognitis quantitatibus per substitutionem.

Resolutio. Sint aequationes 1) $x+y=a$, et 2) $x-b=y$, resolvendae, id est, x et y inveniendae per expressiones cognitas. Ex alterutra aequatione quaeratur valor alterutrius incognitae, puta x vel y; ponaturque valor inventus in altera aequatione loco quantitatis aequivalentis; substitutio perfecta erit, et tunc jam omnia in expressionibus cognitis inveniri poterunt. Quaeratur itaque ex 1). $x+y=a$, quantitas x; erit $x=a-y$; hunc valorem in altera aequatione $x-b=y$ substituendo, erit $x-b=a-y-b=y$. Id est: $a-y-b=y$. Hac ergo ratione datae ambae aequationes in unam transformatae sunt, in qua una duntaxat incognita reprehenditur. Sed ex hac erit $a-b=y+y=2y$; et $\frac{a-b}{2}=y$.

Nunc jam facile invenitur altera incognita x rursum substituendo inventum valorem de y, in aequatione $x = a - y$, loco y. Est enim $x = a - \left(\frac{a-b}{2}\right)$ $= a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Sholion. 1) Aliter. Sint $x + y = a$, et $x - b = y$. Erit substituto valore de y in prima aequatione $(x + x - b) = a$, seu $2x = a + b$, ergo $x = \frac{a+b}{2}$. Et substituto hoc valore de x in aequatione $x - b = y$; erit $\frac{a+b}{2} - b = y$; id est $\frac{a+b-2b}{2} = y$; seu $\frac{a-b}{2} = y$.

§. 149. *Coroll.* Quodsi plures, quam duae incognitae in pluribus aequationibus adsint, prima substitutio in omnibus aequationibus, in quibus fieri potest, instituenda est; deinde denuo pro incognita secunda quantitate valor aequivalens quaerendus, ac substitutio repetite instituenda est. Sint ad hoc illustrandum sequentes tres aequationes:

1) $x + y + z = a$
2) $x - y + 2z = b$
3) $x + 2y - 2z = d$.

Quaeratur valor pro x ex prima; erit $x = a - y - z$. Hic valor substituatur in ambabus reliquis aequationibus; jam sequentes prodibunt aequationes:

I. $a - y - z - y + 2z = b$, seu $a - 2y + z = b$. Et
II. $a - y - z + 2y - 2z = d$; seu $a + y - 3z = d$.

Porro ex alterutra harum aequationum valorem de y determinando, puta ex I. $a+z-2y=b$; erit $a+z=b+2y$, ſeu $a+z-b=2y$; ergo

III. $\frac{a+z-b}{2}=y$. Valoris de y ſubſtitutio in II. dabit aequationem hanc:

$a+\frac{a+z-b}{2}-3z=d$; in qua una duntaxat incognita reprehenditur. Ex hac inveniatur z methodo nota. Erit $\frac{2a+a+z-b-6z}{2}=d$, ſeu $\frac{3a-5z-b}{2}=d$; et $3a-5z-b=2d$. Unde $3a-b=2d+5z$, et $3a-b-2d=5z$. Ergo

IV. $\frac{3a-b-2d}{5}=z$. Quodſi etiam reliquae incognitae per cognitas expreſſiones inducendae ſint; fiat ſubſtitutio 1mo in valore iſtius y in III.; et erit $y=\frac{a+z-b}{2}=\frac{a-b}{2}+\frac{z}{2}=\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3a-b-2d}{5}\right)$; ſeu $y=\frac{a-b}{2}+\frac{3a-b-2d}{10}$; ſeu $y=\frac{10a-10b+6a-2b-4d}{20}$, ſeu $y=\frac{16a-12b-4d}{20}$, ſeu

V. $y=\frac{4a-3b-d}{5}$.

Denique utrumque valorem de z et y modo inventum in 1) inventa aequatione fubftituendo;

erit $x = a - y - z = a - \frac{(4a - 3b - d)}{5} - \frac{(3a - b - 2d)}{5}$, et reductis ad eundem denominatorem; erit $x = \frac{5a - 4a + 3b + d - 3a + b + 2d}{5}$,

feu VI. $x = \frac{4b + 3d - 2a}{5}$.

Schol. 2. Modus transformandi aequationes per fubftitutionem, et generatim ratio vel modus fubftituendi familiaris cuique tyroni fit oportet; nam in illo maxima commoda per totam Mathefin inveniuntur. Hac quoque operatione Mathetae fuis in operibus frequentiffime utuntur, quamvis idem etiam comparatione, et faepius una alterave computandi fpecie breviffima ratione praeftari poffet.

De Comparatione.

§. 150. *Compofitio* unius aequationis ex duabus, eft illa operatio algebraica, qua valor quantitatis incognitae ex datis, vel inventis aequationibus faepius quaeritur, et ex earum duabus aequatio nova conficitur. Vocatur illa etiam *comparatio* (Vergleichung) duorum valorum ejusdem quantitatis.

Coroll. Fundamentum hujus methodi exterminandi quantitatem incognitam per aequalitatem valorum ejus nititur in hoc axiomate: *Quae aequalia funt uni tertio, aequalia funt inter fe.*

Schol. Methodus comparandi valores ejusdem quantitatis in difficilioribus et complexis computationibus (calculis) etiam revera multo facilior est, quam substituendi modus. Praeterea quod processum syllogisticum operantem tyronem quin sciat, edoceat, atque hac ratione cogitationum systema magis ordinet et firmet.

§. 151. *Problema.* Resolvere duas aequationes per Comparationem.

Resolutio. Sit 1) $x+y=a$; et 2) $x-b=y$.

Quaeratur in aequatione alterutra valor alterutrius quantitatis, puta x. Prima dabit $x=a-y$; secunda dabit $x=y+b$. Tum per aequalitatem valorum ejusdem x duae aequationes in unicam transformentur, nempe: $a-y=y+b$; et invenietur $a-b=2y$; inde

3) $\frac{a-b}{2}=y$. Comparando hunc valorem cum valore in 2); erit $x-b=y$, et etiam

$$\frac{a-b}{2}=y; \text{ ergo}$$

$$x-b=\frac{a-b}{2};$$ ex qua aequatione etiam valor incognitae x deducatur: eritque $x=\frac{a-b}{2}+b=\frac{a-b+2b}{2}=4)\ \frac{b+a}{2}$.

§. 152. *Problema.* Resolvere tres aequationes, vel ex tribus aequationibus invenire tres incognitas, per Comparationem.

Resolutio. Sint aequationes datae:

1) $x+y+z=a$.
2) $x-y+2z=b$.
3) $x+2y-2z=d$.

Quaeratur in omnibus tribus valor unius ejusdemque incognitae, puta x; erit ex prima:

I. $x=a-y-z$; ex secunda:
II. $x=b+y-2z$; ex tertia:
III. $x=d+2z-2y$.

Tum comparentur duo valores ejusdem quantitatis, puta x; erit comparando I. cum II. $a-y-z=b+y-2z$ (A). Comparando II. cum III. $b+y-2z=d+2z-2y$ (B).

Igitur jam duae habentur aequationes, in quibus tertia incognita x non reprehenditur. In utraque quaeratur deinde valor alterutrius incognitae, puta y. Erit in (A):

$a-y-z=b+y-2z$;
$a-z=b+2y-2z$, seu
$a-z+2z-b=2y$; hoc est
$a+z-b=2y$; ergo

C) $\frac{a+z-b}{2}=y$. Et in (B)

$b+y-2z=d-2y+2z$; erit
$b+y+2y-2z=d+2z$, seu
$3y-2z=d+2z-b$, et
$3y=d+2z+2z-b$; id est
$3y=d+4z-b$; ergo valor secundus

D) $y=\frac{d+4z-b}{3}$.

Comparatio horum duorum valorum quantitatis

ejusdem y in C et D, dabit aequationem unicam, ex qua jam valor incognitae z facili modo deducetur. Nam

$$\frac{a+z-b}{2}=\frac{d-b+4z}{3}; \text{ ergo}$$

$$\frac{3a+3z-3b}{2}=d-b+4z; \text{ seu}$$

$$3a+3z-3b=2d-2b+8z, \text{ seu}$$
$$3a-3b=2d-2b+8z-3z, \text{ vel}$$
$$3a-3b+2b-2d=5z; \text{ et ergo}$$

$$E)\ \frac{3a-b-2d}{5}=z.$$

Ut etiam pro y et x expressiones quantitatum cognitarum evolvantur, jam sive substitutione, sive rursum nova comparatione ejusdem valoris uti possumus. Substituatur itaque valor hic inventus de z, in C vel in D, ut eruatur valor de y; erit substituendo in C:

$$y=\frac{a+z-b}{2}=\frac{a-b}{2}+\frac{z}{2}, \text{ valoris loco } z:$$

$$y=\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3a-b-2d}{5}\right)=\frac{a-b}{2}+$$

$$\frac{3a-b-2d}{10}; \text{ ergo } y=\frac{10a-10b+6a-2b-4d}{20},$$

$$\text{seu } y=\frac{16a-12b-4d}{20}=F)\ \frac{4a-3b-d}{5}.$$

Tandem substitutis valoribus pro z, et y inventis in valore de x; obtinetur etiam expressio pro x in quantitatibus cognitis. Nam in I.

$x = a - y - z$; erit ergo

$$x = a - \left(\frac{4a - 3b - d}{5}\right) - \left(\frac{3a - b - 2d}{5}\right), \text{ vel}$$

$$x = \frac{5a - 4a + 3b + d - 3a + b + 2d}{5}; \text{ seu}$$

G) $\frac{4b + 3d - 2a}{5} = x$. Ut in resolutione per substitutionem (§. 149.)

Coroll. Simili modo procedendum est, quum plures tribus incognitis, in totidem aequationibus reprehenduntur. Operationem hoc pacto longiorem et magis complexam fieri debere, ex natura rei patet; caeterum eidem procedendi et computandi methodo sive in substitutione sive in comparatione locus est.

Schol. Hic quoque notandum, non omnia istius generis problemata tam loboriose, ut hucusque praeceptum erat, computanda esse. Saepe una alterave incognita quantitas se ipsam ex aequatione exterminat (tollit), ut in procinctu videbimus, et tunc operatio multo facilior redditur. Saepe ejusmodi quantitates applicatione unius sequentium operationum tolluntur, et eliminantur, et tunc laxa difficultas magnopere rescinditur.

De speciebus (calculandi modis), quatenus exterminandis quantitatibus ex aequationibus inserviunt.

§. 153. Quodsi eadem incognita quantitas in duabus aequationibus occurrat addita, haec quan-

titas eo exterminari poteſt, ſi aequationes a ſe invicem ſubducantur. Quodſi quantitas talis in una aequatione addita, in altera ſubducta exiſtat, idem per additionem ambarum aequationum effici poteſt. Idem valet in multiplicatione, et diviſione.

Coroll. Fundamentum hujus calculandi modi conſiſtit in *axiomate hoc:* Aaequalia aequalibus addita, ab aequalibus ſubducta, per aequalia multiplicata, et diviſa, ſemper dant iterum aequalia in ſumma, differentia, producto et quoto.

Schol, Haec calculandi methodus non ſemper quidem, et in problematis plurium, quam duarum incognitarum non ubique applicari poteſt, interea, quum ejus uſui applicatio eſt, maximum plerumque commodum comparat, et praeter hoc expreſſiones admodum abbreviat. Saepius hunc in finem aequationes prius reducendae et praeparandae ſunt, uti reducendo fractiones, multiplicando unam alteramve aequationem per numerum vel quantitatem quampiam, ut incognitae exterminandae aequales acquirant factores, elevando aequationem unam ad potentiam alteri ſimilem etc., quae id genus omnia regulis ſcilicet praecipi nequeunt, ſed potius exercitio et judicio Analyſtae permittantur.

§. 154. *Problema.* Reſolvere aequationes (exterminare incognitas) per ſpecies id eſt: per Algorithmum.

Resolutio. Sit datae aequationes

1) $x+y=a$, et

2) $x-y=b$. Addantur ambae; erit

$2x=a+b$; et ergo

$x=\frac{a+b}{2}$. Subtrahatur secunda a prima; erit

$x+y-(x-y)=a-b$; seu

$x+y-x+y=a-b$, vel

$2y=a-b$; ergo

$y=\frac{a-b}{2}$.

Sint aliae datae:

1) $\frac{x+y}{2}=a$, et

2) $x-y=b$. Erit ex prima:

3) $x+y=2a$; et cum

$x-y=b$; erit additis:

$2x=2a+b$; ergo

$x=\frac{2a+b}{2}$.

Nunc jam invento x; facile invenietur y ex quacunque aequatione vel per comparationem, vel per substitutionem valorum. Erit substituendo in 3) loco x valorem ejus:

$\frac{2a+b}{2}+y=2a$; ergo

$y=2a-\frac{2a-b}{2}=\frac{4a-2a-b}{2}=\frac{2a-b}{2}$.

Sint aliae datae 1) $5x-y=a$, et
2) $3x+4y=b$.

Multiplicando primam per 4; emergit
3) $20x-4y=4a$; et addendo tertiam fecundae; erit $23x=4a+b$; ergo

$$4)\ x=\frac{4a+b}{23}.$$

Ex fecunda invenitur $y=\frac{b-3x}{4}=\frac{b}{4}-\frac{3x}{4}$; fubftitutoque valore invento loco x; erit

$$5)\ y=\frac{b}{4}-\frac{3}{4}\left(\frac{4a+b}{23}\right)=\frac{b}{4}-\frac{12a-3b}{92}.$$

$$\text{feu } y=\frac{92b-4.12a-12b}{368}=\frac{80b-48a}{368}.$$

Dentur hae tres refolvendae per meras fpecies: 1) $x+y+z=a$, 2) $x-y+2z=b$. 3) $x+2y-2z=d$. Imprimis addatur prima alteri; erit 4) $2x+3z=a+b$. Tunc fumatur fecunda bis; erit 5) $2x-2y+4z=2b$. Deinde addantur quinta et tertia: erit 6) $3x+2z=2b+d$. Porro multiplicetur 4ta per 2, et 6ta per 3; erit in 4ta) $4x+6z=2a+2b$; et ex 6ta) $9x+6z=6b+3d$. Subducta priori a pofteriore; erit $9x-4x+6z-6z=6b-2b+3d-2a$; feu $\frac{5x}{5}=\frac{4b+3d-2a}{5}=x.(A)$.

Nunc poffet jam per fubftitutionem vel comparationem valor incognitae z, et tunc de y in-

veniri. Sed sit inveniendus per meras species. Sumatur ergo inventus valor x bis; erit ex A.)

$2x = \frac{8b + 6d - 4a}{5}$. At in 4) erat $2x + 3z = a + b$.

Subducta priore a posteriore, erit $3z = a + b - \frac{8b - 6d + 4a}{5}$, seu $3z = \frac{5a + 5b - 8b - 6d + 4a}{5}$

seu $3z + \frac{9a - 3b - 6d}{5}$. Utrinque dividendo

per 3; $z = \frac{3a - b - 2d}{5}$ (B.).

Tandem ut inveniatur y; fiat substitutio valorum x et z in 1); erit $y = a - x - z$; seu $y =$
$a - \frac{(4b + 3d - 2a)}{5} - \frac{(3a - b - 2d)}{5}$ seu $y =$

$\frac{5a - 4b - 3d + 2a - 3a + b + 2d}{5}$, seu $y =$

$\frac{4a - 3b - d}{5}$. Ut antea per substitutionem, et comparationem.

Scholion. Ex resolutis, et per omnes tres methodos computatis iisdem aequationibus elucet, in Algebra per diversos modos ac rationes idem resultare, et ad eadem pervenire posse. Aptissima autem, adeoque et brevissima computandi ratio quaenam in datis aequationibus sit, id judicium operantis magis, quam regulas multas spectat. Comparat etiam usus et frequens exercitatio plura artificia calculandi.

Caput IV.

Problemata duas tresque incognitas, et totidem aequationes involventia.

§. 155. I) Euclides hoc olim aenigma proposuisse fertur: Ibant mulus, et asina vinum portantes; Asinae sub pondere ingemiscenti ait mulus: quid ita lamentaris? Si e vino, quod portas, mensuram unam mihi dederis; onus meum erit duplo majus, quam tuum; sin tu a me mensuram unam acceperis, aequalia pondera feremus. Quaeritur, quot mensuras mulus, quot item asina bajulaverit?

Denominatio et inventio aequationum, Onus muli sit $= x$; asinae $= y$. Imprimis si asina mensuram 1 mulo daret; muli onus esset $= x + 1$; asinae autem remaneret onus $= y - 1$. Hoc facto onus muli per primam problematis conditionem duplo majus esset, quam asinae; adeoque esset aequale oneri asinae bis sumpto: est ergo $x + 1 = 2(y - 1) = 2y - 2$. Quodsi autem mulus asinae 1 mensuram daret; asinae onus esset $y + 1$; mulo autem remaneret onus $= x - 1$; porro hoc casu per alteram probl. conditionem ipsorum onera aequalia essent, est ergo $x - 1 = y + 1$.

Resolvendae itaque sunt aequationes hae;

1) $x - 1 = 2y - 2$, et

2) $x - 1 = y + 1$. Subducendo 1mam a 2da;

erit $2 = \quad y - 3$; et ergo $5 = y$. Et substituto hoc valore loco y in secunda; emerget x. Ergo $x - 1 = 5 + 1 = 6$; seu $x = 6 + 1 = 7$.

Scholion. Idem obtinetur per ſubſtitutionem et comparationem.

II) Plures luſores volunt lucrum inter ſe diſtribuere. Si uni 4 fl. darenrur; reſtant 20 fl. Quodſi autem unus 5 fl. acceperit; 60 fl. deerunt. Quaeritur, quot luſores fuerint, et quot rhenenſes lucrati ſint?

Denominatio et inventio aequationum. Numerus luſorum ſit $= x$; florenorum $= y$. Quodſi unus eorum acceperit 4 fl; habebunt ſimul $4x$ fl, et cum 20 reſtent, erit 1) $4x + 20 = y$. Si autem unus 6 fl. accipiat; id efficit $5x$; et quia 60 fl. deſunt ad totam ſummam, eſt 2) $5x = y + 60$. Scribatur ergo Reſolutionis cauſa:

2:) $5x = 60 + y$, et

1.) $4x + 20 = y$. Tum ſubducat. 1ma ab altera;

erit $x - 20 = 60$; et

$x = 60 + 20 = 80$. Subſtitutoque valore loco x in prima; erit $4 \times 80 + 20 = y$; ſeu $320 + 20 = y$; ergo $340 = y$.

III) Duo ſocii debent 150 fl. Si alter primo $\frac{2}{3}$ partes ſui daret; prior hos 150 fl. ſolus ſolvere poſſet; et quodſi prior alteri de ſuo $\frac{3}{4}$ partes donaret, etiam alter 150 fl. debitos ſolus ſolvere poſſet. Quaeritur quot quivis debeat?

Reſolutio. Imprimis denomina, et invenias aequationes. Habeat ergo prior x fl.; alter y fl. Ex prima probl. condit. erit.

1) $x + \frac{2y}{3} = 150$; ex altera erit 2:) $y + \frac{3x}{4} =$ 150. Ex prima invenies $x = 150 - \frac{2y}{3} =$

$\frac{450-2y}{3}$ (A.); ex altera erit $\frac{3x}{4} = 150 - y$, ergo $3x = 600 - 4y$;

igitur B) $x = \frac{600-4y}{3}$. Et comparando hos duos inventos valores in A. et B; erit

$\frac{450-2y}{3} = \frac{600-4y}{3}$; seu

$450-2y=600-4y$; seu

$450+2y=600$, vel

$2y=600-450=150$; ideo

$y=\frac{150}{2}=75$ fl. Substituto jam hoc valore loco y in quocunque valore de x; erit in) $x =$

$\frac{450-2y}{3}$:

$x = \frac{450-2\times 75}{3} = \frac{450-150}{3} = \frac{300}{3}$, seu

$x=100$ flor.

§. 156. *Problema.* IV.) Data summa duorum numerorum $= a$, et differentia quadratorum $= b$; invenire numeros.

Resolutio. Sit major numerus $= y$; minor $= x$. Iuxta primam suppositionem erit $x + y = a$; juxta secundam erit $y^2 - x^2 = b$. Quaeratur valor ejusdem y; erit ex prima $y=a-x$; ex altera $y^2 = b + x^2$. Verum ut valor unius statuatur alteri aequalis, opus est, ut aequatio prima attollatur ad potentiam quadraticam, $y^2 = (a-x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$; quo facto,

per aequalitatem valorum ejusdem y^2 oritur aequatio haec:

$b + x^2 = a^2 - 2ax + x^2$; et reducendo erit

$2ax = a^2 - b$; seu

$x = \frac{a^2 - b}{2a}$. Et substituendo inventum valorem loco x in prima aequatione, erit $y = a - x$

$= a - \frac{a^2 + b}{2a} = \frac{2a^2 - a^2 + b}{2a}$, seu $y = \frac{a^2 + b}{2a}$.

V.) Parenti, qui jam triplo senior erat filio, dicebat filius: post 15 annos tantum duplum meae aetatis habebis. Quae aetas parentis et filii?

Resolutio. Sit aetas parentis $= x$; filii $= y$; per primam condit. $3y = x$; vel $y = \frac{x}{3}$; per alteram $y + 15 = \frac{x + 15}{2}$. Substitutoque loco y valore suo; erit $\frac{x}{3} + 15 = \frac{x + 15}{2}$; et ergo

$\frac{x + 45}{3} = \frac{x + 15}{2}$, seu

$2x + 90 = 3x + 45$, et

$90 - 45 = 3x - 2x$; seu

$45 = x =$ aetati parentis. Sed erat $y = \frac{x}{3}$; erit substituto valore invento $y = \frac{45}{3} = 15 =$ aetati filii.

VI.) Si tribus plures in coena fuissent; quilibet uno floreno minus solvisset; sin autem duo

defuissent, quilibet uno floreno plus solvere debuisset. Quot erant personae, et quot floreni?

Resolutio. Sint personae x, floreni y. Summa ab omnibus soluta, erit $= xy$; pars cujusvis $= \frac{xy}{x}$. Ex prima conditione erit

1) $\frac{xy}{x+3} = y-1$; ex secunda autem

2) $\frac{xy}{x-2} = y+1$. Erit jam in 1)

$xy = (y-1)(x+3) = xy - x + 3y - 3$; seu

3) $x = 3y - 3$. Ex 2)

$xy = (y+1)(x-2) = xy + x - 2y - 2$; seu

4) $2y + 2 = x$. Comparando hos duos valores in 3) et 4); erit $2y + 2 = 3y - 3$; ergo

$2 + 3 = 3y - 2y$, et

$5 = y$. Et cum sit

$x = 2y + 2$; erit

$x = 2y + 2 = 5 \times 2 + 2 = 10 + 2 = 12$.

VII.) Caupo miscet 20 urnas accipiendo duo genera vinorum, primi mensura una venditur 24 crucif., alterius 16 cruc.; mixti mensura vendi debet 20 crucif. Quaeritur, quot urnae ex utroque sint accipiendae?

Denominatio et inventio aequationum. Sint urnae melioris $= x$; deterioris $= y$; erit 1) $x + y = 20$ (urn.), vel

$40x + 40y = 20 \times 40 = 800$ mensuris.

Pretium 1 urnae vini, de quo 1 mensura 24 cruc. venditur $= 40 \times 24 = 960$ cruc., et x mensurarum $= 960 x$ cruc.; simili modo efficiunt $40 y$ mensurae per 16 cruc. pretium $= 640 y$ cruc. Et 20 urnae seu 800 mensurae

per 20 cruc. efficiunt 16000 cruc. Hinc etiam est 2) $960 + 640\,y = 16000$. Ex 1) $x = 20 - y$; ex 2) $x = \frac{16000 - 640y}{960}$. Et comparando valores erit $20 - y = \frac{16000 - 640y}{960}$, seu

$19200 - 960\,y = 16000 - 640\,y$; seu

$19200 - 16000 = 960\,y - 640\,y$; seu

$3200 = 320\,y$; ergo

$\frac{3200}{320} = y$, et

$10 = y$; substitutoque hoc valore in 1) $x = 20 - y$; erit $x = 20 - 10 = 10$.

Coroll. Ponantur quantitates miscendae x et y; totum compositum $= a$; pretium de $x = b$; pretium de $y = c$; pretium partium commixtarum sit d; totius ergo mixti $= ad$ erit.

Miscenda dant $x + y = a$ (1.)

Pretium $bx + cy = ad$ (2.). Erit jam ex 1.) $x = a - y$; et ex 2.)

$x = \frac{ad - cy}{b}$. Comparando valores fit

$a - y = \frac{ad - cy}{b}$; ergo

$ab - by = ad - cy$; et

$ab - ad = by - cy = (b - c)y$; ergo

$\frac{ab - ad}{b - c} = y$, seu

$\frac{a(b - d)}{b - c} = y$. Sed $x = a - x$; ergo erit $x = a -$

$$\left(\frac{ab-ad}{b-c}\right)=\frac{ab-ac-ab+ad}{b-c}$$, id eſt; $x=\frac{ad-ac}{b-c}=\frac{a(d-c)}{b-c}$.

Scholion. Problemata iſtius generis alligationis ſeu mixtionis reſolvimus jam per aequationes unius incognitae ut §. 140 etc. videre licet. Problemata autem mixtionis, in quibus plures occurrunt partes miſcendae ad indeterminata pertinent, de quibus inferius agemus.

§. 157. *Problema.* VIII.) Paterfamilias relinquit viduam, duos filios, tres filias, et haereditatem 1300 fl. Jure teſtamenti mater ter tantum accipere debet, ac filius unus, et unus filius alterum tantum, quod una filia.

Reſolutio. Pars matris ſit $=x$; filii $=y$; filiae $=z$, Erit $x=3y$, (1.). 2.) $y=2z$. Et tota haereditas $=x+2y+3z=1300$ (3.). Subſtituto valore loco x; erit in 3.) $3y+2y+3z=1300$, ſeu 4.) $5y+3z=1300$; et ſubſtituto valore loco $5y$, erit in 4.) $10z+13z=1300$, ſeu $13z=1300$; et ergo

$z=\frac{1300}{13}=100$. Inde invenitur
$y=2z=200$; ergo
$x=3y=600$.

Examen. $x+2y+3z=600+400+300=1300$.

Scholion. Si partem filiae dicas x: erit pars filii unius $=2x$; pars matris $=6x$. Unde $1300=6x+4x+3x$; ſeu $1300=13x$; ergo $\frac{1300}{13}=100=x$. Itaque $2x=200$; et $600=6x$.

§. 158. *Problema.* Relinquit paterfamilias viduam cum posthumo, et 9000 fl. Ex testamento mater tantum $\frac{1}{3}$ partem filii nasciturі, et alterum tantum filiae nasciturae accipere debet. Contingit autem, ut filius et filia nascantur. Quot obveniet cuivis?

Resolutio. Sit rata matris $= x$; filii $= y$; filiae $= z$. Per conditionem problematis est $3x = y$, vel $x = \frac{y}{3}$; et $x = 2z$. ergo $\frac{x}{2} = z$. Erit itaque comparatis valoribus de x, $\frac{y}{3} = 2z$, seu $y = 6z$. Ex altera conditione problematis est $x + y + z = 9000$ fl. Substitutis valoribus pro y et z; erit $x + 3x + \frac{x}{2} = 9000$, seu $4x + \frac{x}{2} = 9000$; id est $\frac{9x}{2} = 9000$; ergo $9x = 18000$, et

$$x = \frac{18000}{9} = 2000.$$ Inde $y = 3x = 6000$; et

$$z = \frac{x}{2} = 1000.$$

Scholion. Si ratam filiae dicas x; esset rata matris $2x$; et rata filii $= 6x$ foret. Unde esset $x + 2x + 6x = 9000$. Seu $9x = 9000$. Ergo
$x = \frac{9000}{9} = 1000$ pars filiae
$2x = 2000$ pars matris; et
$6x = 6000$ pars filii. Facile ergo colligitur, quantum intersit, ut incognitae rite denominentur, et exprimantur.

§. 159. *Problema.* Venduntur tres equi, pretio $=100$ aureorum. Pretium primi et tertii dempto secundi $=60$ aureis. Pretium primi et secundi dempto tertii $=50$ aureis. Quaeritur pretium singulorum.

Resolutio. Pretium primi $=x$
secundi $=y$
tertii $=z$.

Conditio prima dat $x+y+z=100$;
secunda $x-y+z=60$;
tertia $x+y-z=50$.

Auferatur aequatio tertia a prima; erit $2z=50$; seu $z=\frac{50}{2}=25$. | Addatur secunda tertiae; erit $2x=110$; seu $x=\frac{110}{2}=55$.

Auferatur porro secunda a prima; erit $2y=40$; seu $y=\frac{40}{2}=20$, Erit itaque
$x=55$
$y=20$
$z=25$. Et $x+y+z=55+20+25=100$.

§. 160. *Problema.* Venduntur tres equi; pretium primi $=x$; secundi $=y$; tertii $=z$. Est autem pretium primi cum dimidio pretio reliquorum $=25$ aureis. Pretium secundi cum parte tertia reliquorum sunt 26 aurei. Pretium tertii cum dimidia parte reliquorum sunt 29. Quaeritur pretium singulorum.

Resolutio. Ex prima conditione $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=25$

secunda $y+\frac{x}{3}+\frac{z}{3}=26$

tertia $z+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=29$

Reducendo fractiones erit ex prima aequatione $2x+y+z=50$ (A.) Ex altera aequatione $3y+x+z=78$ (B.) Ex tertia aequatione $2z+x+y=58$ (C.). Subtracta aequatione (A) ab (B), habebitur: $2y-x=28$, seu

$2y-28=x$. Subducendo

(C) ab (B); erit $2y-z=20$; ergo

$2y-20=z$.

Snbſtituendo valores loco z et x, in A. vel in C. obtinebitur y. Eſt ergo ſubſtituendo in (A.).

$2(2y-28)+y+2y-20=50$; ſeu

$4y-56+y+2y-20=50$: id eſt

$7y-76=50$, ſeu

$7y=50+76=126$. Ergo

$y=\frac{126}{7}=18$. Subſtituto tandem hoc valore loco y in valore de z et x; erit $x=2y-28=2\times 18-28=36-28=8$. Et $z=2y-20=36-20=16$.

Scholion. Poſſet etiam valor alterutrius incognitae ex A. vel B. vel C inveniri, et tum in alterutra ſubſtitui, vel poſſent valores ejusdem incognitae comparari. Eſſet ex A) $z=50-2x-y$. Ex B.) $z=78-3y-x$. Ex C.) $z=\frac{58-x-y}{2}$. Comparando hos valores. erit;

D.) $50-2x-y=78-3y-x$; et

$$78-3y-x=\frac{58-x-y}{2}; \text{ ſeu}$$

$156-6y-2x=58-x-y$ (E.). Et ſubducendo D. ab E.; erit $156-6y-2x-50+2x+y=58-x-y-78+3y+x$; id eſt $106-5y=2y-20$, ſeu $126=7y$; orgo $\frac{126}{7}=18=y$. Unde jam facile valor de x et z inveniretur per ſubſtitutionem vel comparationem.

Caput V.

De resolvendis Aequationibus et Problematis indeterminatis.

§. 161. Perspeximus hucusque, quomodo problema quodcunque, quod totidem diversas conditiones, ac incognitas quantitates continet, ad finalem aequationem unius incognitae reduci possit. Hic inde colligere licet, cum primum in problemate aliquo conditiones una pauciores, quam incognitae quantitates quaerendae sunt, reprehendantur, aequationem finalem semper adhuc duas incognitas contenturam esse. Illa dicuntur problemata *determinata*, quia incognitae quantitates per totidem conditiones adeo determinatae sunt, ut pro quavis certus et determinatus (unus duntaxat) valor inveniatur; haec autem *indeterminata problemata*, cum incognita quaevis diversos, et saepius infinite multos (indefinitos) valores habere possit.

Inde etiam aequatio, unam duntaxat incognitam complectens, *determinata*, et quae pluresquam unam iocognitam obtinet, *indeterminata* appelatur. Aequatio indeterminata autem semper supponit, valores incognitarum esse numeros *integros* et *positivos*. Quodsi itaque aequatio indeterminata $bx \mp ay = c$
resolvenda sit; numeri integri et positivi determinandi sunt, qui loco x et y substituti problemati proposito satisfacere possunt.

Coroll. 1) Quodsi factor b per n, et factor a etiam per n dividi potuerit; etiam bx et ay, igitur et eorum summa $bx+ay$, et eorum differentia $bx-$

ay, vel *c*, per *n* poterunt dividi (§. 34. Coroll. 10. et 11.).

Coroll. 2) Quodsi igitur Coefficientes *b* et *a* incognitarum *x* et *y* communem habuerint divisorem (*n*), quem expressio cognita (*c*) non habet; resolutio aequationis vel problematis impossibilis erit.

Ita nullatenus fieri potest, ut $14x \mp 7y = 50$ sit. Nam $14x \mp 7y$ ubique unum eorum numerorum significat, qui per 7 dividi possunt, de quibus tamen 50 non est (§. 38. Coroll.).

Coroll. 3) Quodsi *ay* sit negativum, vel $bx - ay = c$; erit $bx = c + ay$, et

$$x = \frac{c + ay}{b}, \text{ et } y = \frac{bx - c}{a}.$$

Igitur *x* majus fieri debet, quoties *y* crescit, et vice versa, quoties *x* crescit, etiam *y* crescit.

Coroll. 4) Possunt itaque valores de *x* et *y* in infinitum crescere; atque problema id, quod ad ejusmodi aequationem deducit, semper *infinitas resolutiones* habet; et appellatur ideo *indefinitum*.

Coroll. 5) Quodsi *ay* sit positivum, vel $bx + ay = c$; fit $x = \frac{c - ay}{b}$, et

$$y = \frac{c - bx}{a}.$$

Igitur crescente *y*, decrescit *x*; et crescente *x*, decrescit rursus *y*. Neutra itaque harum incognitarum in infinitum decrescere potest, sed tantum tam diu, quam diu altera adhuc positiva vel nihilo id est o major restat; nam quoniam *x* et *y* quantitates zero majores esse debent, vel

$x>0$; erit	et $y>0$; erit
$\frac{c-ay}{b}>0$,	$\frac{c-bx}{a}>0$; ergo
et $c-ay>0$	$c-bx>0$
$c>ay$	$c>bx$,
$\frac{c}{a}>y$; vel $y<\frac{c}{a}$;	$\frac{c}{b}>x$, vel
	$x<\frac{c}{b}$ (V. Arith. Elem).

Limitantur itaque valores de y zero et $\frac{c}{a}$;

et valores de x jacent inter 0 et $\frac{c}{b}$.

Coroll. 6) Problema itaque, quod ad ejusmodi aequationem revocatur, femper *certum* duntaxat *numerum refolutionum* habet.

Caput VI.

Problemata indeterminata, vel indefinita, quae ad aequationem iftiusmodi ducunt: $bx-ay=c$, vel $bx=c+ay$; in quibus ergo x et y infinitos valores habere poffunt.

§. 162. *Problema.* 1) Ego debeo alicui 1 cruciferum. Sed tantum habeo quinarios, et alteri foli feptenarii funt. Quomodo poteft folutio peragi?

Resolutio. Dabo illi x quinarios, ergo $5x$ cruciferos; et ille mihi restituet y septenarios, igitur $5y$ cruciferos. Iuxta conditionem problematis illi $5x$ crucif. 1 crucif. plus efficere debent, quam hi $7y$ crucif. Quare $5x = 7y + 1$. Dividendo per 5; erit $x = \frac{7y+1}{5}$, vel

$x = y + \frac{2y+1}{5}$. Verum quantitas $\frac{2y+1}{5}$

debet numerum integrum repraesentare, aliquin x non posset numerus integer fieri, quod contra conditionem foret. Exprimatur itaque conditio haec hoc, ut expressio $\frac{2y+1}{5}$ numero integro v. g. p aequalis statuatur; habebimus iterum aequationem

$$\frac{2y+1}{5} = p,$$

ex qua valorem de y, ita ut ex priori valorem de x inquirere, et rursum determinare possumus, sub qua conditione etiam y numerus integer fiat.

Quum itaque $\frac{2y+1}{5} = p$ accipiatur; erit $x = y + p$; et $2y + 1 = 5p$, ergo
$2y = 5p - 1$, et
$y = \frac{5p-1}{2} = 2p + \frac{p-1}{2}$. Est ergo y numerus integer, simul ac $\frac{p-1}{2}$ sit integer numerus. Sed

id desiderat conditio. Sit itaque $\frac{p-1}{2}=q$;
erit tum

$y=2p+q$; et $p-1=2q$, ergo $p=2q+1$.

Quodsi hac ratione valor de p loco p in valore de y, et tum valor de y et de p loco y et p in valore de x, substituatur; erit $y=2p+q=2(2q+1)+q=4q+2+q=5q+2$. Et $x=y+p=5q+2+2q+1=7q+3$.

Inde x et y semper fit numerus integer, qualiscunque numerus integer loco q substituatur.

Verum, cum x et y non solum integri, sed etiam positivi numeri, vel tales esse debeant, qui zero majores sunt; erit porro

$x>0$	$y>0$, ergo
$7q+3>0$	$5q+2>0$
$7q>-3$	$5q>-2$
$q>-\frac{3}{7}$; ergo	$q>-\frac{2}{5}$; ergo et
$q>-1$.	$q>1$,

Valores ergo de q erunt $=$ 0	1	2	3	4	5	etc
et substituendo valores de q loco						
q in $x=7q+3$; erit $x=3$	10	17	24	31	38	etc
et in y; erit $y=5q+2=2$	7	12	17	22	27	etc

Potero ergo illi dare 3 quinarios, ubi ille mihi 2 septenarios restituet; vel do illi 10 quinarios, et ille mihi 7 septenarios, et ita porro, ego semper 7 quinarios plus do, et ille mihi 5 septenarios plus restituit in infinitum.

Coroll. Inde emanat sequens regula: Quaeratur valor unius incognitae, reducendo aequationem, substituendoque loco remanentis fractionis quantitatem integram, et inquirendo in valores am-

barum incognitarum, tamdiu, donec deveniatur ad expreſſionem valoris omni fractione carentem. Tum ſubſtituendo hunc ultimum valorem determinentur ambae incognitae per eandem quantitatem. Porro inquirantur limites hujus quantitatis, per quam x, et y expreſſae ſunt. Denique valor poſſibilis ejusdem ſubſtituatur in x et y, ut valores incognitarum poſſibiles, vel incrementum eorum detegatur.

Scholion. Ex hac methodo reſolvendi ejusmodi problemata ſimul videmus, quomodo, et qua ratione omnes reſolutiones poſſibiles ad Calculum revocari queant, ita ut valor incognitarum minimus, et etiam incrementum ejus inveniatur, (maximum nunquam inventuri) absque omni tentatione arbitraria, vel falſa.

§. 163. *Problema.* 2) Foemina quaedam attulit ova vendenda. Tertiam partem vendidit in ſuburbio, quartam in urbe, unum contuſit, et reliqua illi ablata erant. Quot ergo attulerat, et quot erant illi ſublata?

Reſolutio. Portaverit ſecum x; et ſit numerus ſublatorum $= y$; erit per conditionem problematis $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 1 + y = x$. Reducendo:

$\frac{4x + 3x}{12} + 1 + y = x$: et multiplicando per 12:

$7x + 12 + 12y = 12x$; ſeu

$12y + 12 = 12x - 7x = 5x$. Ergo

$5x = 12y + 12$: aequatio indeterminata. Ex qua x quaeratur. Erit

$x = \frac{12y + 12}{5} = 2y + 2 + \frac{2y + 2}{5}$. Sit jam

$\frac{2y + 2}{5} = p$; erit $x = 2y + 2 + p$, et

$2y + 2 = 5p$; seu

$2y = 5p - 2$, et

$y = \frac{5p - 2}{2} = 2p - 1 + \frac{p}{2}$. Sit porro

$\frac{p}{2} = q$; erit $y = 2p - 1 + q$; et

$p = 2q$. Substituendo hunc valorem in valore de y, et tum de x; fit

$y = 2p - 1 + q = 4q - 1 + q = 5q - 1$; et ergo

$x = 2y + 2 + p = 10q - 2 + 2 + 2q = 12q$.

Ut valor de q inveniatur minimus, inquiratur:

$y > 0$; ergo	et $x > 0$; ergo etiam
$5q - 1 > 0$	$12q > 0$;
$5q > 1$	$q > 0$.
$q > \frac{1}{5}$; ergo	
$q > 0$	

Itaque $q =$	1	2	3	4	5	6	etc.
$x = 12q =$	12	24	36	48	60	72	etc.
$y = 5q - 1 =$	4	9	14	19	24	29	etc.

Valor de x minimus $= 12$, et crescit continuo 12 plus, et valor de $y = 4$, et crescit 5 plus in infinitum. Dijudicandum modo in casu posito erit, quotnam potuerit secum portare.

Scholion. Calculus, quo quantitatis ejus valor minimus, atque incrementum inquiritur, per quam

deinde x et y exprimuntur, iisdem principiis innititur, quae de majori et minori praecepta fuerant. Hinc non differt ab operationibus aequationis.

Problema. 3. Invenire numerum, qui divisus per 7, pro residuo 2, et divisus per 4, pro residuo 1 relinquat.

Resolutio. Sit Numerus $= N$; erit $\frac{N}{4} = x + \frac{1}{4}$, vel $N = 4x + 1$; et $\frac{N}{7} = y + \frac{2}{7}$, vel $N = 7y + 2$. Erit ergo

$4x + 1 = 7y + 2$, seu

$4x = 7y + 1$; et

$x = \frac{7y+1}{4} = y + \frac{3y+1}{4}$. Sit itaque

$\frac{3y+1}{4} = p$; erit $x = y + p$; et

$3y + 1 = 4p$, seu

$3y = 4p - 1$; et

$y = \frac{4p-1}{3} = p + \frac{p-1}{3}$. Porro sit

$\frac{p-1}{3} = q$; erit $y = p + q$; et

$p - 1 = 3q$; ergo

$p = 3q + 1$. Substituto hoc valore de p in y; erit $y = p + q = 3q + 1 + q = 4q + 1$. Et substitutis valoribus de p et y in valore de x; erit $x = y + p = 4q + 1 + 3q + 1 = 7q + 2$. Et igi-

tur $N = 4x + 1 = 28q + 8 + 1 = 28q + 9$. Porro

$$x > 0 \text{; ergo}$$
$$28q + 9 > 0$$
$$28q > -9$$
$$q > -\frac{9}{28}$$
$$q > -1,$$

Itaque $q = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$ etc.
$N = 28q + 9 = 9, 37, 65. 93, 121, 149, 177$ etc.

Examen.

$177 : 4 = 44 + \frac{1}{4}$.	Et $177 : 7 = 25 + \frac{2}{7}$
16	14
17	37
16	35
1	2

Valor minimus de $N = 9$; et reliqui in infinitum numero 28 crefcunt.

Problema 4. Horologiarius quidam duabus rotis opus habét, quarum una in alteram agat; numerus dentium autem rotae minoris divifus per 3 pro refiduo 1, et numerus dentium majoris divifus per 5 pro refto 2 relinquere debet; porro minor rota fexies circumrotari debet durante una rotatione rotae majoris, ita tamen, ut tunc primus dens minoris in dentem fecundum majoris ageret. Quot dentes debet quaevis rota habere?

Refolutio. Habeat minor rota x dentes; erit propter primam conditionem $\frac{N}{3} = x + \frac{1}{3}$; $N = 3x + 1$. Rota major habeat y dentes; erit propter conditionem fecundam $\frac{M}{5} = y + \frac{2}{5}$, ergo

$M = 5y + 2$. Igitur per tertiam conditionem

$6(3x+1) = 5y+2+1$; seu

$18x+6 = 5y+3$; seu

$5y = 18x+3$. Et

$$y = \frac{18x+3}{5} = 3x + \frac{3x+3}{5}.$$ Sit jam

$$\frac{3x+3}{5} = p;$$ erit $y = 3x + p$; et

$3x + 3 = 5p$, seu

$3x = 5p - 3$, et

$$x = \frac{5p-3}{3} = p - 1 + \frac{2p}{3}.$$ Sit porro

$$\frac{2p}{3} = q;$$ erit $x = p - 1 + q$; et

$2p = 3q$, seu

$$p = \frac{3q}{2} = q + \frac{q}{2}.$$ Sit deinde

$$\frac{q}{2} = r;$$ erit $p = q + r$; et

$q = 2r$. Hinc $p = 2r + r = 3r$.

$x = p - 1 + q = 3r - 1 + 2r = 5r - 1$.

$y = 3x + p = 15r - 3 + 3r = 18r - 3$.

Itaque $N = 3x + 1 = 15r - 3 + 1 = 15r - 2$.

Et $M = 5y + 2 = 90r - 15 + 2 = 90r - 13$.

Denique $15r - 2 > 0$	$90r - 13 > 0$
$15r > 2$	$90r > 13$
$r > \frac{2}{15}$	$r > \frac{13}{90}$
ergo $r > 0$	$r > 0$.

Ponatur ergo $r = 1$	2	3	4	5	6 etc.
$N = 15r - 2 = 13$	28	43	98	113	128 etc.
$M = 90r - 13 = 77$	167	257	347	437	527 etc.

N, vel numerus minimus dentium rotae minoris $= 13$, sequentes crescunt numero 15; et *M* vel numerus minimus dentium rotae majoris $= 77$, sequentes numero 90 sine fine crescere vides.

Examen. $\frac{43}{3} = 14 + \frac{1}{3}$; et $\frac{257}{5} = 51 + \frac{2}{5}$. Et $6(43) = 258 = M + 1 = 257 + 1$. Ergo numeri 43 et 257 satisfaciunt conditioni tertiae.

Caput VII.

Problemata indeterminata, quae ad aequationem istiusmodi ducunt: $bx + ay = c$, vel $bx = c - ay$; in quibus ergo x et y certum numerum valorum habent.

§. 164. *Problema* 1. Quidam emit equos hungar. et polon. 1583 aureis, et solvit pro 1 hungar. 21 aureos, et pro 1 polon. 17 aureos. Quot erant hungar. et quot polon.?

Resolutio. Sint x polon. et y hungar. Omnes hungar. veniunt $21y$, et omnes polon. $17x$ aureis. Igitur secundum problematis conditionem erit $17x + 21y = 1583$ aureis; seu

$17x = 1583 - 21y$; et dividendo per 17:

$$x = \frac{1583 - 21y}{17} = 93 - y + \frac{2 - 4y}{17}.$$ Ex quo consequitur, x fieri numerum integrum, cum primum $\frac{2 - 4y}{17}$ numerus sit integer. Ut igitur

haec conditio rite exprimatur, quantitas $\frac{2-4y}{17}$ numero integro, et quidem negativo integro $= -p$, poni debet, quia $\frac{2-4y}{17}$ ſemper numerus negetivus eſt, cum y ſemper numerus poſitivus integer manere debeat.

Sit itaque $\frac{2-4y}{17} = -p$; erit ſubſtitutis valoribus:

$x=93-y-p$; et $2-4y=-17p$, ſeu

$2+17p=4y$; erit ergo $y=\frac{17p+2}{4}$; et actu dividendo $y=4p+\frac{p+2}{4}$. Sit itaque

$\frac{p+2}{4}=q$; erit $y=4p+q$; et

$p+2=4q$; ſeu $p=4q-2$. Subſtituto valore de p in valore de y, et tum in valore de x, erit:

$y=4p+q=4(4q-2)+q$, ſeu

$y=16q-8+q=17q-8$. Et

$x=93-y-p=93-17q+8-4q+2$, ſeu

$x=103-21q$.

Cum autem x et y poſitivi numeri eſſe debeant,

vel $y>0$	et $x>0$; ideo erit
$17q-8>0$	$103-21q>0$
$17q>8$	$103>21q$
$q>\frac{8}{17}$	$\frac{103}{21}>q$
$q>0$	$4\frac{19}{21}>q$; ergo $5>q$.

Limites de q ſunt o et 5. Igitur

$q = 1$	2	3	4.
$y = 17q - 8 = 9$	26	43	60.
$x = 103 - 21q = 82$	61	40	19.

Poteſt ergo eſſe $y = 9,\ 26,\ 43$, et 60; et $x = 82,\ 61,\ 40$, et 19.

Coroll. 1. Regula reſolvendi ejusmodi problemata, vel reducendi tales aequationes conformis eſt illi, quae in (§. 162. Coroll.) reducendis aequationibus indefinitis indeterminatis data erat, hoc ſolo diſcrimine, quod prima remanens fractio, quantitati negativae aequalis ponatur, quemadmodum id quantitatis incognitae natura deſiderat.

Coroll. 2. Et cum incognitae quantitates certum ſemper numerum valorum habere debeant in iſtiusmodi aequationibus; patet, quantitatem eam, qua in fine incognitae exprimantur, etiam certos, et ideo duos limites habere.

§. 165. *Problema* 2. Emit quidam oves et vacas, 1 ovem 5 flor. et 1 vacam 31 fl. ſolvitque pro omnibus ſimul 402 fl. Quot erant oves et vacae?

Reſolutio. Sit numerus ovium $= x$, et vacarum $= y$. Pretium ovium erit $= 5x$; et pretium vacarum $= 31y$. Juxta conditionem probl. fiet $5x + 31y = 402$, ſeu $5x = 402 - 31y$; dividendo per 5, erit:

$$x = \frac{402 - 31y}{5} = 80 - 6y + \frac{2 - y}{5}.$$

Sit ergo $\frac{2-y}{5} = -p$; erit

$x = 80 - 6y - p$; et $2 - y = -5p$. Ergo
$-2 + y = 5p$; et $y = 5p + 2$.

Itaque $x = 80 - 6y - p = 80 - (5p + 2)6 - p$, seu
$x = 80 - 30p - 12 - p = 68 - 31p$.

Porro, cum $y > 0$ et $x > 0$; erit

$5p + 2 > 0$	$68 - 31p > 0$
$5p > -2$	$68 > 31p$
$p > -\frac{2}{5}$	$\frac{68}{31} > p$; ergo $3 > p$.
$p > -1$.	

Hinc $p =$	0	1	2.
$y = 5p + 2 =$	2	7	12.
$x = 68 - 31p =$	68	37	6.

Sunt ergo valores de $x = 68$, 37, et 6, et valores de $y = 2$, 7, 12.

Scholion. Simili modo reducuntur permultae aequationes, indeterminatae, inter alias et istae, in quibus certus numerus florenorum in duabus speciebus numorum persolvendus requiritur.

Problema. 3. Dantur duo genera vinorum, urna primi venditur 13 fl. secundi 19 fl. simul veniunt 511 fl. Quot urnae sunt cujusvis speciei?

Resolutio. Sint x urnae vini, quod 13 fl. et y urnae vini, quod 19 fl. venit. Igitur pretium amborum $13x + 19y = 511$; seu

$$13x = 511 - 19y, \text{ et}$$

$$x = \frac{511 - 19y}{13}; \text{ et diviso}$$

$x = 39 - y + \frac{4-6y}{13}$. Sit $\frac{4-6y}{13} = -p$; erit

$x = 39 - y - p$, et $4 - 6y = -13p$; seu

$-4 + 6y = 13p$; ergo $6y = 13p + 4$; seu

$y = \frac{13p+4}{6} = 2p + \frac{p+4}{6}$. Sit porro

$\frac{p+4}{6} = q$; erit $y = 2p + q$, et $p + 4 = 6q$, seu

$p = 6q - 4$. Ergo substituto valore in y; erit
$y = 2p + q = 2(6q - 4) + q = 12q - 8 + q$, seu
$y = 13q - 8$. Igitur $x = 39 - y - p = 39 - 13q + 8 - 6q + 4$; seu
$x = 51 - 19q$.

Deinde $y > 0$ et $x > 0$; ideo etiam

$13q - 8 > 0$	$51 - 19q > 0$
$13q > 8$	$51 > 19q$
$q > \frac{8}{13}$	$\frac{51}{19} > q$
$q > 0$	$3 > q$.

Itaque $q =$	1	2.
$y = 13q - 8 =$	5	18.
$x = 51 - 19q =$	32	13.

§. 166. Si ex datis aequationibus istis

$ax + by = p$, et
$cx + dy = q$;

prior per c, et altera per a multiplicetur; in sequentes aequationes abeunt:

$acx + bcy = cp$, et
$acx + ady = aq$;

in quibus incognita x semper cum eodem coefficiente ac comparet.

Quodſi a in c contineatur, vel $\frac{c}{a} = n$, ſeu $c = an$ ſit; x jam in ambabus aequationibus eundem coefficientem $an = c$, acquiret, dummodo prima aequatio per n multiplicetur; et ſi coefficientes a et c communem factorem habent, vel ſi ſit $a = nf$, et

$c = ng$;

iterum x in utraque aequatione eundem coefficientem acquiret, modo prima aequatio per g, et altera per f multiplicetur. Nam ſi ſit

$a = nf$, et $c = ng$; erit
$ag = ngf$, et $cf = ngf$.

Quodſi itaque duae aequationes, in quibus incognita una cum eodem coefficiente occurrit, ab invicem ſubducantur, dum hic coefficiens in utraque aequatione ejusdem deſignationis eſt, vel ſibi addantur, dum hicce coefficiens contrariae ſit deſignationis; ſemper ad aequationem devenitur, quae illam incognitam jam non amplius continet. Ita $acx + bcy = cp$ ſubducta ab hac:

$acx + ady = aq$; dat

$ady - bcy = aq - cp$, aequationem, in qua incognita x exterminata eſt.

Et ſi ſit $bcy - acx = cp$, et
$ady + acx = aq$; additae hae aequationes dant $ady + bcy = aq + cp$, iterum aequationem, in qua incognita x amplius non occurrit.

Datur itaque nova methodus ex duabus aequationibus plurium incognitarum tertiam inveniendi, quae una incognita minus, quam priores continet (Confer. §. 153. Cor.)

§. 167. *Coroll.* Quodsi igitur problema aliquod duas aequationes, quamque trium incognitarum involvat, potest imo ex his una deduci, quae tantum duas incognitas quantitates continet (nempe: addendo illas, si eadem incognita in ambabus cum eodem coefficiente et diversa designatione occurrat; et subtrahendo, si eadem incognita in ambabus cum eadem designatione et eodem coefficiente occurrrat). Coefficiens autem aequalis (idem) in utraque aequatione facile, si nondum adest, obtinetur: si una alterave aequatio vel multiplicetur, vel dividatur per factorem illum, qui aequales faciat coefficientes incognitae quantitatis exterminandae.

2do. Ope hujus aequationis possunt tunc valores harum duarum incognitarum, ut antea per numerum generalem integrum exprimi,

3tio, hi valores, loco duarum incognitarum in alterutra duarum aequationum substitui, et pacto hoc etiam valor tertiae incognitae per eundem numerum generalem integrum determinari, et

4to denique, ex valoribus harum trium incognitarum adhuc limites hujusce numeri generalis integri inveniri, proinde omnes resolutiones possibiles istiusmodi problematis indicari.

§. 168. *Problema* 1. Inter 30 pauperes sint 100 flor. distribuendi ita, ut vir obtineat 8 fl. foemina 5 fl. et infans 1 fl. Quot adsunt viri, foeminae, et infantes?

Resolutio. Sint viri x, foeminae y, infantes z;

fiet $x+y+z=30$; et obtinebunt fimul
$8x+5y+z=100$. Subducta prima a fecunda,

eft $7x+4y=70$; feu
$4y=70-7x$; et

$$y=\frac{70-7x}{4}=17-x+\frac{2-3x}{4}.$$ Sit ergo

$$\frac{2-3x}{4}=-p;$$ erit $y=17-x-p$; et

$2-3x=-4p$; feu $-2+3x=4p$; ergo

$3x=4p+2$, et $x=\frac{4p+2}{3}$; feu

$x=p+\frac{p+2}{3}$. Sit porro $\frac{p+2}{3}=q$; erit

$p+2=3q$; ergo $p=3q-2$. Erit
$x=p+q=3q-2+q=4q-2$. Ergo
$y=17-x-p=17-4q+2-3q+2=21-7q$.
Poftea ex aequatione $x+y+z=30$ invenitur:
$z=30-y-x$; ergo fubftituto valore de x et y jam invento; fit

$z=30-21+7q-4q+2=11+3q$.

Denique $x>0$, et $y>0$; ergo etiam

$4q-2>0$	$21-7q>0$
$4q>2$	$21>7q$
$q>\frac{2}{4}$	$\frac{21}{7}>q$
$q>0$	$3>q$.

Igitur erit q	=	1	2.
$x=4q-2$	=	2	6.
$y=21-7q$	=	14	7.
$z=11+3q$	=	14	17.

Examen. Mares	$= 2$	obtinent ſimul 16 fl.
foeminae	$= 14$	70
infantes	$= 14$	14
Summa	$= 30$	Summa $= 100$ fl.

Problema 2) Caupo tria genera vinorum miſcet, primi menſura venditur 4 cruciferis ſecundi 8 cruc., tertii 20 cruc.; mixturus 20 menſuras, cujus menſura 10 cruciferis vendi debet. Quaeritur, quot menſurae ex quolibet accipiendae ſint?

Reſolutio. Pone 1) $x + y + z = 20$ menſuris.

2) $4x + 8y + 20z = 20 \times 10 = 200$ cruciferis $=$ pretio. Primam per 4 multiplicando, et ab altera ſubtrahendo, eſt:

2) $4x + 8y + 20z = 200$;

3) $4x + 4y + 4z = 80$

$$\underline{ - - - - }$$

$4y + 16z = 120$, ſeu

$4y = 120 - 16z$, et

$$y = \frac{120 - 16z}{4} = 30 - 4z.$$ Igitur ex prima:

$x = 20 - y - z$; et ſubſtituendo valores:

$x = 20 - 30 + 4z - z = 3z - 10.$

Porro $x > 0$, et $y > 0$, et $z > 0$; ergo et

$3z - 10 > 0$	$30 - 4z > 6$	
$3z > 10$	$30 > 4z$.	
$z > \frac{10}{3}$	$\frac{30}{4} > z$	
$z > 3$	$8 > z$.	

Itaque z	$= 4$	5	6	7
$y = 30 - 4z$	$= 14$	10	6	2
$x = 3z - 10$	$= 2$	5	8	11
Examen. Nam summa:	20	20	20	20.

Et pretium V. g. in ultimo casu, erit: $7 \times 20 + 2 \times 8 + 11 \times 4 = 44 + 16 + 140 = 200$.

§. 169. *Problema* 3) Auceps quidam centum aves ceperat, paros, fringillas, et linarias virides. Parum uno crucifero, fringillam 2 cruciferis, et linariam viridem 3 cruciferis vendebat, et pro omnibus 3 florenos accipiebat. Quot erant aves de qualibet specie?

Resolutio. 1) x par. $+ y$ frin. $+ z$ virid. $= 100$ sum.
2) $x + 2y + 3z = 180$ cruc. pretium.

differentia $= y + 2z = 80$; et
$y = 80 - 2z$. Sed ex 1)
$x = 100 - y - z$. Ergo $x = 100 - 80 + 2z - z$, seu
$x = 20 + z$.

Porro $y > 0$, et $x > 0$, et $z > 0$; ideo etiam

$80 - 2z > 0$	$20 + z > 0$
$80 > 2z$	$z > 0$
$\frac{80}{2} > z$	
$40 > z$	

Itaque z	$= 1$	2	3	----	19	----	39.
$x = 20 + z$	$= 21$	22	23	----	39	----	59.
$y = 80 - 2z$	$= 78$	76	74	----	42	----	2.

Crescit ergo z ab 1 usque 39, unitate;
x a 21 usque 59, unitate;
y decrescit a 78 usque 2, binario. Ubique sunt centum, et pretium = 3 fl. = 180 crucif. rite multiplicando etiam emergit.

Problema 4) Personae numero 100 pro prandio solvunt 100 florenos; vir 2 fl. 30 crucif. mulier 40 cruc. et proles 30 cruc. Quot erant viri, foeminae, et infantes?

Resolutio. Viri $= x$; foeminae $= y$; proles $= z$. Erit 1) $x + y + z = 100$. Summae Person.

$$\text{Tum } 2\tfrac{1}{2}x + \frac{40}{60}y + \frac{30z}{60} = 100 \text{ flor., seu}$$

$$\frac{5x}{2} + \frac{2y}{3} + \frac{z}{2} = 100; \text{ vel}$$

$$5x + \frac{4y}{3} + z = 200; \text{ seu}$$

2) $15x + 4y + 3z = 600$. Sed primam ter sumendo; est 3) $3x + 3y + 3z = 300$; et tertiam a secunda subtrahendo erit $12x + y = 300$; ergo

$y = 300 - 12x$. Et ex prima

$z = 100 - y - x$; ergo substituendo valores:

$z = 100 - 100 + 12x - x = 11x - 200$.

Porro $y > 0$ et $z > 0$; ergo etiam

$300 - 12x > 0$	$11x - 200 > 0$
$300 > 12x$	$11x > 200$
$\frac{300}{12} > x$	$x > \frac{200}{11}$
$25 > x$	$x > 18\frac{2}{11}$; ergo $x > 18$.

Hinc						
$x =$	19	20	21	22	23	24.
$y = 300 - 12x =$	72	60	48	36	24	12.
$z = 11x - 200 =$	9	20	31	42	53	64.

x crescit a 19 usque ad 24, unitate;
z crescit a 9 usque ad 64, numero 11;
y decrescit a 72 usque ad 12, numero 12.

§. 170. Aequationes, quas hactenus resolvimus, semper primam tantum potentiam quantitatis incognitae continebant. Hae idcirco aequationes *primi gradus* appellantur, uti reliquae aequationes 2di, 3tii, 4ti, vel 5ti gradus, prout nempe altissima potentia incognitae quantitatis, quae in illis occurrit, 2da, 3tia, 4ta, vel 5ta est; et ita porro.

Caput VIII.

De Aequationibus determinatis secundi gradus resolvendis.

§. 171. Aequationes *secundi gradus* dicuntur eae, in quibus incognitae potentia altissima 2da, vel quadratum; in quibus ergo nec 3tia, nec altior potentia occurrit.

Aequationes secundi gradus vocantur etiam *quadraticae*, atque omnes in sequenti formula:

$$x^2 \pm px = q$$

continentur. Nam in illis nunquam plus, quam triplices expressiones (termini) occurrere possunt: ejusmodi, quae 2dam potentiam incognitae, quae primam potentiam incognitae, et quae meras cognitas quantitates continent. Caeterum in istiusmodi aequatione quadratum incognitae similiter, ut in aequatione 1mi gradus prima potentia incognitae semper a suo coefficiente liberari potest.

§. 172. *Coroll.* 1) Sit jam $p = o$; formula generalis $x^2 \pm px = q$, in sequentem

$$x^2 = q$$

transformatur, quae aequatio omnes aequationes

quadratas comprehendit, in quibus prima potentia incognitae non occurit. Hae appellantur *quadratae purae* aequationes, et illae, quae praeter 2dam, etiam primam dignitatem incognitae complectuntur, audiunt *imperfectae*; *affectae* vel *incompletae* (vermischte oder verwickelte) *quadratae*.

Quodsi igitur $x^2 = q$ sit, cum haec aequatio duplicem expressionem ejusdem quantitatis contineat, vel secundae potentiae sibi aequentur; etiam earum radices quadratae sibi aequari debent. Vel, quodsi $x^2 = q$ sit; erit etiam

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{q}; \text{ et ergo } x = \pm \sqrt{q}.$$

Radicem signo $+$ vel $-$ designari debere, vel positivam et negativam esse; demonstratum erat, quia tum positivae tum negativae radices quadratum dant positivum.

Quodsi ergo q quantitas positiva rationalis fuerit; valor de x accurate determinari poterit, si ex numero cognito $= q$ radix actu extrahatur; si autem q numerus irrationalis positivus sit; valor istius x etiam nullo alio pacto, quam per approximationem determinari potest: et si denique q negativum fuerit; valor de x erit impossibilis, et id certo indicio, problema tale, quod ad hanc aequationem deduxerit, vel quod ejusmodi aequationem involvit, ipsum, absurditatem petere.

§. 173. *Coroll.* 2) Aequatio quadrata pura igitur reducitur (resolvitur), si quadratum quantitatis incognitae ab omnibus cognitis liberatur, (si igitur quadratum incognitae solotarium in uno membro aequationis locatur, et cognitae omnes in altero

membro ejusdem ſtant), et tum ex utroque membro aequationis radix quadrata extrahitur. E. gr.

Sit $x^2 - 2a - \frac{3x^2}{4} = 12a$; erit

$4x^2 - 8a - 3x^2 = 48a$; et

$x^2 - 8a = 48a$; ſeu $x^2 = 56a$. Igitur

$\sqrt{x^2} = \sqrt{56a}$; ſeu

$x = \pm\sqrt{56a}$.

Sit $\frac{x^2 + 6}{2} = \frac{55}{2}$; erit

$x^2 + 6 = 55$; ſeu $x^2 = 55 - 6 = 49$, ergo:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$; ſeu $x = \mp 7$.

Sit $8x^2 - 9 = 6x^2 + 29$; erit

$8x^2 - 6x^2 = 29 + 9$; ſeu $2x^2 = 38$: ergo

$x^2 = \frac{38}{2} = 19$. Hinc $\sqrt{x^2} = \sqrt{19}$; ergo

$x = \pm\sqrt{19}$; itaque $x = \pm 4{,}358$ etc.

Sit $2x^2 + 164 = 66$; eſt

$2x^2 = 66 - 164 = -98$, et

$x^2 = -\frac{98}{2} = -49$. Igitur

$\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{-49}$. Quoniam autem $\sqrt{-49}$ impoſſibilis eſt, hinc qualecunque problema ad hanc aequationem ducens, ſemper repugnantiam petet, igitur ipſum abſurdum eſſe debebit.

Caput IX.

Problemata determinata, quae ad aequationes quadratas puras ducunt.

§. 174. Problemata nonnulla initio aequationem incompletam quadratam continere videntur;

reductis vero, vel evolutis, id est, a quadrato incognitae omnibus cognitis separatis. aequatio revera quadrata pura evadit.

§. 175. *Problema.* 1) Sit inveniendus numerus, cujus quarta pars in ejus quintam partem ducta aequalis sit 20.

Resolutio. Numerus quaesitus $= x$; est $\frac{x}{4} \times \frac{x}{5}$ $= 20$; seu $\frac{x^2}{20} = 20$; ergo

$x^2 = 20 \times 20 = 400$. Hinc $\sqrt{x^2} = \sqrt{400}$; et $x = \pm\sqrt{(400)} = \pm 20$.

Problema. 2) Sit inveniendus numerus, ejus conditionis, ut si numero addatur 9, et ille a 9 subtrahatur, tum ea summa per hanc differentiam multiplicetur, 17 pro producto emergat.

Resolutio. Numerus sit $= x$; erit secundum condit. probl. $(9+x)(9-x) = 17$. Frgo

$81 + 9x - 9x - x^2 = 17$; seu $81 - x^2 = 17$; seu $81 - 17 = x^2$; et $64 = x^2$. Hinc $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{64}$; et ergo $x = \pm 8$.

Problema. 3) Quidam emit 56 florenis pannum. Si numerus cubitorum per $\frac{7}{8}$ multiplicetur, evenit numerus florenorum, quibus quaevis ulna constitit. Quot ergo sunt ulnae, et quanti constat una?

Resolutio. Sit numerus ulnarum $= x$; quaevis singula constabat $\frac{56}{x}$ fl; estque juxta cond. probl.

$$x \times \frac{7}{8} = \frac{56}{x}: \text{ seu } \frac{7x}{8} = \frac{56}{x}; \text{ et}$$

$$\frac{7x^2}{8} = 56; \text{ et } 7x^2 = 56 \times 8 = 448; \text{ ergo}$$

$$x^2 = \frac{448}{7} = 64. \text{ Igitur } \sqrt{x^2} = \sqrt{64}; \text{ et}$$
$$x = \pm\sqrt{(64} = \pm 8.)$$

In exemplo est $x = +8$; hinc $\frac{56}{x} = \frac{56}{8} = 7$fl. $=$ pretio cujusvis ulnae.

Problema. 4) Invenire numerum, cujus quadratum, si a Centenario subducatur, et eorum differentia per 2 dividatur, aequale sit 18.

Resolutio. Numerus quaesitus sit $= x$; fiet

$$\frac{100 - x^2}{2} = 18; \text{ seu } 100 - x^2 = 36; \text{ ergo}$$

$100 - 36 = x^2$; seu $64 = x^2$. Igitur $\sqrt{x^2} = \sqrt{64}$; et $x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$. Est enim

$$\frac{100 - 64}{2} = \frac{36}{2} = 18.$$

§. 176. *Problema.* Sit resolvenda generalis aequatio quadrata $x^2 \pm px = q$.

Resolutio et Demonstratio. Quoniam $x^2 \pm px = q$, vel cum hae potentiae sibi aequentur; hinc etiam earum radices aequales esse debent; igitur $\sqrt{(x^2 \pm px)} = \sqrt{q}$.

Si itaque radix quadrata ex expressione $x^2 + px = q$, extrahenda foret, esset calculus hic:

$\sqrt{(x^2 + px)} = x$ prima pars radicis)

$-x^2$

$$+px : 2x = \frac{px}{2x} = \frac{p}{2} \text{ (altera pars radicis)}$$

px

$0.$

Iam duplum factum ex parte 1ma in 2dam subtractum, tollit se. Nunc adhuc quadratum partis 2dae vel $\frac{p^2}{4}$ subtrahi deberet; hocce $\frac{p^2}{4}$ autem in expressione $x^2 + px$ non reprehenditur; igitur ex eadem radix quadrata extrahi non potest, quia semper adhuc residuum $-\frac{p^2}{4}$ remanet, quod vero non remaneret, si hoc aequationis membrum quantitate $\frac{p^2}{4}$ majus foret. Verum tunc aequalitas inter membra turbaretur. Ut igitur aequalitas membrorum retineatur, simulque efficiatur, quo ex primo aequationis membro quadratae imperfectae radix quadratica extrahi possit; in utroque membro aequationis quadratum partis 2dae radicis quadratae addi debet. Hac ratione aequatio generalis $x^2 \mp px = q$, in sequentem:

$$x^2 \mp px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}$$

transformatur.

Cum jam hoc pacto, ex primo membro aequationis radix quadrata extrahi poteſt; ideo etiam x vel incognita inveniri poterit. Quodſi enim ſit $x^2 \pm px = q$: erit etiam utrinque addendo $\frac{p^2}{4}$.

$$x^2 \pm px + \frac{p^2}{4} = q + \frac{p^2}{4}; \text{ et}$$

$$\sqrt{\left(x^2 \mp px + \frac{p^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right)}.$$ Et radice extracta ex primo membro, erit $x \mp \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4};\right)}$;

igitur $x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}.\right)}$.

Si itaque expreſſio $\left(q + \frac{p^2}{4}\right)$ numerus rationalis poſitivus ſit: valor de x accurate invenitur; ſi ſit numerus poſitivus irrationalis: per approximationem; et ſi ſit numerus negativus: valor iſtius x impoſſibilis eſt.

Scholion. Litera p ſignificat quemcunque coefficientem, qui ſimplici x conjunctus eſt: $\frac{p}{2}$ ejus ſemiſſem, et $\frac{p^2}{4}$ quadratum hujus ſemiſſis.

§. 177. *Coroll.* Aequatio ergo quadrata imperfecta *resolvitur*; si (postquam aequatio formam eam obtinuerit, ut quadratum incognitae separatum ab omnibus coefficientibus et cognitis quantitatibus, tum prima potentia incognitae, cum suo coefficiente in uno membro aequationis locum teneant, caeteraeque cognitae quantitates omnes in altero membro ejusdem) in utroque aequationis membro quadratum dimidii coefficientis de incognita x addatur, et denique ex utroque membro radix quadrata extrahatur.

Exempla. 1) Sit haec aequatio resolvenda: $2x^2 - 344 = -x$. Fiet

$$2x^2 + x = 344; \text{ seu } x^2 + \frac{x}{2} = \frac{344}{2}, \text{ et}$$

$$x^2 + \frac{x}{2} = 172.$$ Nunc aequatio existit ordinata,

$$\text{estque hic } p = \tfrac{1}{2}; \frac{p}{2} = \tfrac{1}{4}; \text{ et } \frac{p^2}{4} = \tfrac{1}{16}.$$

$$\text{Itaque } x^2 + \frac{x}{2} + \tfrac{1}{16} = 172 + \tfrac{1}{16}; \text{ hinc}$$

$$\sqrt{\left(x^2 + \frac{x}{2} + \tfrac{1}{16}\right)} = \sqrt{\left(172 + \tfrac{1}{16}\right)}; \text{ et}$$

$$x + \tfrac{1}{4} = \pm \sqrt{(172 + \tfrac{1}{16})} = \pm \sqrt{(\tfrac{2753}{16})} = \pm \frac{52,46 \text{ etc.}}{4}; \text{ ergo}$$

$$x = -\tfrac{1}{4} \mp \frac{52,46 \text{ etc.}}{4}.$$

2) Sit resolvenda sequens aequatio:

$x^2 + 15 = 8x$; erit

$x^2 - 8x = -15$; et $p = 8$; $\frac{p}{2} = 4$; $\frac{p^2}{4} = 16$.

Hinc $x^2 - 8x + 16 = -15 + 16 = 1$. Ergo $\sqrt{(x^2 - 8x + 16)} = \sqrt{1}$; seu $x - 4 = \pm 1$; et $x = 4 \pm 1$. Ergo $x = 5$; vel $x = 3$. Nam substituto valore de x in $x^2 + 15 = 8x$: est, $25 + 15 = 8 \times 5 = 40$. Et $9 + 15 = 8 \times 3 = 24$.

3) Sit resolvenda aequatio haec:

$x^2 = 4x + 5$; fiet

$x^2 - 4x = 5$; et	quia $p = 4$
$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$;	$\frac{p}{2} = 2$
$x^2 - 4x + 4 = 9$;	$\frac{p^2}{4} = 4$;

Quare $\sqrt{(x^2 - 4x + 4)} = \sqrt{9}$; ergo $x - 2 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Hinc $x = +2 \pm 3$; et ideo $x = 5$; seu $x = -1$.

4) Sit resolvenda aequatio sequens:

$\frac{x^2}{2} = x + 84$; fiet

$x^2 = 2x + 168$; seu $x^2 - 2x = 168$; et

$x^2 - 2x + 1 = 168 + 1$;	quia $p = -2$
$x^2 - 2x + 1 = 169$; ergo	$\frac{p}{2} = -1$
$\sqrt{(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{169}$	$\frac{p^2}{4} = 1$.
seu	

$x - 1 = \pm\sqrt{169} = \pm 13$. Ergo $x = 1 \pm 13$. Consequenter erit $x = 14$, vel $x = -12$.

§. 178. Vidimus jam, in aequatione generali $x^2 \pm px = q$, semper $\frac{p^2}{4}$ utrinque addi debere, ut membrum primum quadratum evadat perfectum. Idem ex eo dignosci potest, quod quodvis quadratum binomii tribus constet partibus: ex quadrato primae partis radicis, ex duplo facto ambarum partium et ex quadrato partis 2dae ejusdem.

Atqui x^2 est quadratum partis primae, et px est productum duplae partis primae ductae in 2dam, vel duplae partis 2dae multiplicatae per 1mam. Sed x est pars prima: igitur p est duplum partis 2dae, et $\frac{p}{2}$ est pars secunda radicis; ergo $\frac{p^2}{4}$ quadratum partis 2dae. Ac hoc quadrato partis 2dae primum membrum aequationis minus est, quam quadratum completum $x^2 \pm px + \frac{p^2}{4}$ radicis binomiae $x \pm \frac{p}{2}$.

In aequatione igitur quadrata imperfecta jam ordinata semper quadratum partis secundae radicis deest; hocque in utroque membro aequationis addendum est. Hoc quadratum invenitur; si dimidius coefficiens quantitatis simplicis x ad quadratum elevetur. Sit $x^2 + x = 24\frac{3}{4}$; erit x^2, quadratum partis primae radicis, x duplum factum

partis primae ductae in secundam; sed x est pars prima, igitur $1 =$ duplae parti secundae, ergo $\frac{1}{2}$ est pars ipsa secunda, et $\frac{1}{4}$ ejus quadratum. Hoc ergo quadratum $= \frac{1}{4}$ utrinque addendo: fiet $x^2 + x + \frac{1}{4} = 24\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 25$; et $\sqrt{(x^2 + x + \frac{1}{4})} = \sqrt{25}$. Ergo $x + \frac{1}{2} = \pm \sqrt{25} = \pm 5$; et $x = -\frac{1}{2} \pm 5 = \pm \frac{10}{2} - \frac{1}{2}$. Hinc $x = \frac{9}{2}$; vel $x = -\frac{11}{2}$.

Sit $x^2 + 3x = 4$. Quodsi itaque $x^2 + 3x$ quadratum perfectum fieri debeat; est hac expressione considerata: $x^2 =$ quadrato partis 1mae radicis; $3x$ duplum factum ambarum partium, et quia x pars prima, erit 3 duplum partis 2dae, ergo $\frac{3}{2}$ ipsa pars secunda, et $\frac{9}{4}$ ejus quadratum, quod utrinque additum, dat: $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$. Et $\sqrt{(x^2 + 3x + \frac{9}{4})} = \sqrt{\frac{25}{4}}$. Ergo $x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$, seu $x + \frac{3}{2} = \pm \frac{5}{2}$; ergo $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$; et $x = \frac{2}{2} = 1$; vel $x = -\frac{8}{2} = -4$.

§. 179. *Coroll.* Quoniam ex generali formula: $x^2 + px = q$, incognita $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(p + \frac{p^2}{4}\right)}$; vel ex ea: $x^2 - px = q$, incognita $x = +\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(q + \frac{p^2}{4}\right)}$ invenitur; hinc incognita seu x semper aequalis est dimidio coefficienti de x (si sit negativus), plus vel minus radice quadrata ex summa termini cogniti, et quadrati istius dimidii coefficientis. Et x aequale est plus vel minus radice quadrata ex summa quantitatis cognitae et quadrati dimidii coefficientis de x, minus dimidio coefficiente (si sit positivus).

Scholion. Si in generali aequatione $x^2 \pm px = q$: $q = 0$ ponatur; eſt $x^2 \pm px = 0$; ergo $x^2 = -px$, ſeu $x^2 = +px$. Ergo $x = p$, vel $x = -p$. Itaque ex generali fit aequatio, quae ut aequatio primi gradus reſolvi poteſt. Verum, quoniam (ſi ſit $x^2 \pm px = 0$), $x = \mp \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4} + 0\right)}$, ſeu $x = \mp \frac{p}{2} \pm \frac{p}{2}$, id eſt $x = 0$, et $x = -p$; vel $x = p$, et $x = 0$; incognita x nihilominus ſemper adhuc duos valores habet.

Caput X.

Problemata determinata, quae ad aequationes quadratas incompletas ducunt.

§. 180. *Problema.* 1) Invenire duos numeros, quorum differentia = 11, et productum = 126.

Reſolutio. Sit numerus minor $= x$; erit major $= x + 11$, et eorum productum $= x(x + 11) = 126$; ſeu $x^2 + 11x = 126$.

Ac quia $p = 11$

$\frac{p}{2} = \frac{11}{2}$

$\frac{p^2}{4} = \frac{121}{4}$

$x^2 + 11x + \frac{121}{4} = 126 + \frac{121}{4}$.
Ergo $\sqrt{(x^2 + 11x + \frac{121}{4})} = \sqrt{(126 + \frac{121}{4})}$;
et $x + \frac{11}{2} = \pm \sqrt{(\frac{625}{4}} = \mp \frac{25}{2})$; et
$x = -\frac{11}{2} \mp \frac{25}{2}$. Hinc $x = \frac{14}{2} = 7$; $x + 11 = 18$.
Vel $x = -\frac{36}{2} = -18$; et $x + 11 = -18 + 11 = -7$.

Problema. 2) Invenire numerum ejus qualitatis, ut 8ties a ſuo quadrato ſubtractus, 33 pro reſiduo relinquat.

Reſolutio. Numerus iſte $= x$; octies ſumptus $= 8x$; et $x^2 - 8x = 33$. Cum hic $p = -8$;
$\frac{p}{2} = -4$; et $\frac{p^2}{4} = 16$ ſit; hinc erit
$x^2 - 8x + 16 = 33 + 16 = 49$; et
$\sqrt{(x^2 - 8x + 16)} = \sqrt{49}$; ſeu $x - 4 = \pm \sqrt{49} = \pm 7$.
Ergo $x = 4 \mp 7$; ergo $x = 11$, vel $x = -3$.

Problema. 3) Mercatus ſum equos 1968 florenis. Si pro hac pecunia 4 plures accepiſſem, ſingulus equus 41 florenis vilius (melius) emtus fuiſſet. Quot equos emi?

Reſolutio. Pone me mercatum eſſe x equos; unus eorum conſtabat $\frac{1968}{x}$ flor. Si autem $(x+4)$ equi fuiſſent: conſtaret unus $\frac{1968}{x+4}$ fl. Hinc eſt

$$\frac{1968}{x} = \frac{1968}{x+4} + 41; \text{ et}$$

$$1968 = \frac{1968x}{x+4} + 41x\text{, et}$$

$1968x + 78720 = 1968x + 41x^2 + 164x$; seu

$78720 = 41x^2 + 164x$: seu

$$\frac{78720}{41} = x^2 + \frac{164x}{41} = x^2 + 4x = 1920.$$ Et

cum hic $p = 4$	$x^2 + 4x + 4 = 1920 + 2 = 1960$; hinc
$\frac{p}{2} = 2$	$\sqrt{(x^2 + 4x + 4)} = \sqrt{(1960)}$; et
$\frac{p^2}{4} = 4$	$x + 2 = \pm\sqrt{(1960)} = \mp 14$. Ergo

$x = -2 \pm 14$. Unde $x = 12$; quia hic quantitas positiva duntaxat valet.

Examen. Unus equus constabat $\frac{1968}{12}$ fl. $= 164$ fl.

Si 4 plus obtinuissem: unus constaret $\frac{1968}{12+4}$ $= \frac{1968}{16} = 123$ fl. Atqui $164 - 123 = 41$ fl.

Problema. 4) Duos numeros invenire, quorum summa $= 140$, et quorum productum $= 2875$.

Resolutio. Sit $x + y = 140$, et

$xy = 2875$. Ex his aequationibus

$x = 140 - y$; et $x = \frac{2875}{y}$. Inde

$140 - y = \frac{2875}{y}$; feu multiplicando per y:

$140y - y^2 = 2875$; vel $y^2 - 140y = -2875$,

Et cum $p = -140$; $\frac{p}{2} = -70$, $\frac{p^2}{4} = 4900$;

erit $y^2 - 140y + 4900 = -2875 + 4900 = 2025$. Ergo

$\sqrt{(y^2 - 140y + 4900)} = \sqrt{(2025)}$; et

$y - 70 = \pm \sqrt{(2025)} = \mp 45$. Et

$y = 70 \mp 45$. Ergo

$y = 115$ vel	et $x = 140 - y$; feu
$y = 25$	$x = 140 - 115 = 25$; vel
	$x = 140 - 25 = 115$.

Problema. 5) Filius quidam de fua aetate interrogatus refpondit: junior fum 40 annis meo patre, et fi aetas mea per aetatem patris mei multiplicetur (id eft numerus annorum meae aetatis cum numero annorum aetatis patris mei), prodit aetas, quam attigit Methufalem, qui 969 annos habebat. Quaeritur aetas filii et parentis.

Refolutio. Sit aetas filii $= x$; erit aetas parentis $= x + 40$; et $x(x + 40) = 969$: feu

$x^2 + 40x = 969$. Et cum $\frac{p^2}{4} = 400$ fit; hinc

$x^2 + 40x + 400 = 969 + 400 = 1369$. Et

$\sqrt{(x^2 + 40x + 400)} = \sqrt{(1369)}$. Inde

$x + 20 = \pm \sqrt{(1369)} = \pm 37$; et

$x = -20 + 37 = 17 =$ aetati filii.

Aetas parentis $= x + 40 = 17 + 40 = 57$. Eft enim $57 \times 17 = 969$.

§. 181. Scimus jam, quomodo quantitates sibi addantur, a se invicem subtrahantur, per se invicem multiplicentur, dividantur, ad potentiam eleventur, et tum iterum ex potentiis radix extrahatur. Dedimus quoque eidem quantitati expressionem diversam, atque ex eo semper invenimus id, quod nobis quaerendum dabatur. Attamen semper vel solam aequationem quantorum spectabamus, vel eorum designationem, id est: utrum quantitates illae sint addendae, vel subtrahendae, utrum sint multiplicandae, vel dividendae, utrum illae sint ad potentiam elevandae, vel utrum ex illis radix quaepiam sit extrahenda.

Restant nobis adhuc quanta (quantitates) secundum eorum inaequalitatem pertractanda; rationem modo (vel respectum), quam inter se mutuo obtinent, perpendere debemus.

§. 182. Inaequalitas quantorum eorum, quae objecta Arithmetices sunt, in solo numero unitatum, ex quibus quanta haec constant, consistere potest. Analystae ergo quanta ut talia consideranti, haec sunt vel *aequalia*, vel *inaequalia*. Inaequalia illi vel *majora*, vel *minora* sunt, id est: una quantitas aut plus, aut minus unitatum continet, quam altera.

Cum itaque inquirit, quot unitatibus, vel quot partibus unitatis una quantitas major, vel minor sit, altera; tum perpendit differentiam horum quantorum.

Cum autem inquirit, quoties una quantitas in altera contineatur, vel quod idem est, quoties una major sit altera (quoties nempe unitates unius, vel

ejus partes in altera contentae sint); tunc perpendit quotum harum quantitatum.

Differentia ergo, vel quotiens duarum quantitatum nobis rationem (relatum vel habitudinem ad invicem) quantorum ad invicem dare potest.

Differentia duorum quantorum dicitur *ratio arithmetica* eorumdem, et *quotus* duorum quantorum *ratio geometrica*, vel *ratio* duntaxat per excellentiam.

Sectio Quinta.

De Variis Quantitatum Relationibus et Affectionibus.

Caput I.

De Ratione arithmetica duorum quantorum.

§. 183. *Ratio arithmetica* duarum quantitatum est *differentia* earumdem, *per quantitates ipsas expressa.*

Si sit $a - b = d$; tum dicitur $(a - b)$ *ratio arithmetica* de a et b; et d dicitur *differentia* vera istorum a et b. Quippe hic conferro b cum a (habeo b ad a), invenioque, b vel minus, vel majus, quam a esse, differentiam veram voco d. Porro (a) vocatur *antecedens* (Vorsatz), et b *consequens* (Nachsatz) *rationis*. Ambo vocantur *termini*. $(a - b) = d$, lege: ratio a ad b aequalis $d =$ differentiae.

Coroll. Quodsi duo ex tribus his quantis, antecedente, consequente, et differentia dentur; tertium facile invenitur. Est enim ex posito:

$$(a - b) = d;$$
$$a = d + b; \text{ et}$$
$$b = a - d.$$

Ergo posito: $13 - x = 4$; habebis:

$$13 = 4 + x;$$
$$13 - 4 = x; \text{ seu}$$
$$9 = x; \text{ consequentem.}$$

§. 184. *Theorema.* Ratio arithmetica eadem manet; si antecedenti et consequenti aequalia addantur, vel aequalia ab utroque subtrahantur.

Demonstratio 1) $a-b=(a+n)-(b+n)$. Nam $(a+n)-(b+n)=a+n-b-n$ (Mathesis generalis) $=a-b$.

2) $(a-b)=(a-n)-(b-n)$.
Nam $(a-n)-(b-n)=a-n-b+n$ (§. 17. Algebr.) $=a-b$. Ita erit
$5-3=(5+2)-(3+2)=7-5$; et
$5-3=(5-2)-(3-2)=3-1$.

§. 185. *Theorema.* Ratio arithmetica $(a-b)$ quaevis multiplicatur vel dividitur per eandem quantitatem (n), per quam antecedens et consequens ejusdem multiplicentur, vel dividantur.

Demonstratio. 1) Est enim $(a-b)\times n=an-bn$ (§. 29. Coroll. 4. Arithm. Elem.). Et

2) $\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$ (§. 34. Coroll. 11. ibidem).

Ita erit: $(5\times5)-(3\times5)=(5-3)5$; et

$$\left(\frac{9}{3}\right)-\left(\frac{6}{3}\right)=\frac{9-6}{3}.$$

Caput II.

De Proportione arithmetica discreta.

§. 186. *Proportio arithmetica* est aequalitas duarum rationum arithmeticarum.

Si ſit $(a-b)=d$; et etiam $(e-f)=d$; erit $(a-b)=(e-f)$ (§. 4. Coroll. 5. general. addit etc.). Seu $a-b = e-f$ (proportio arithmetica).

Itaque quatuor magnitudines a, b, e, f, ſtant in proportione arithmetica, et dicuntur *termini* (Glieder) ejusdem. Et quidem a et f termini *extremi*, b et e termini *medii*. Proportionem ipſam harum 4 magnitudinum ita pronunciabis: ſicut ſe habet (vel ſicut eſt) (a) ad b, ita ſe habet (vel eſt), e ad f *arithmedice*.

§. 187. *Theorema.* In quavis proportione arithmetica ſumma mediorum aequalis eſt ſummae extremorum (terminorum).

Demonſtratio. Sit $a-b=d$; et
$e-f=d$; erit
$a-b=e-f$; ſeu una ratio aequalis alteri; ergo vera proportio arithmetica (per defin.), et ſimul *formula generalis* pro quibuscunque 4 magnitudinibus. Sed haec generalis formula proportionis arithmeticae $a-b=e-f$, poteſt conſiderari ut aequatio, ex qua transponendo b obtinetur, $a=e-f+b$; et tranponendo f habetur, $a+f=e+b$. Id eſt, ſumma extremorum = ſummae mediorum.

Quodſi ergo fuerit: $7-5=2$, et $8-6=2$; $\Big\}$ duae aequales rationes;
erit $7-5=8-6$; ergo etiam $7+6=8+5$.

§. 188. *Coroll.* 1) In omni proportione arithmetica quivis terminus *extremus* aequalis eſt ſummae mediorum dempto altero extremo, et quivis *medius* aequalis ſummae extremorum dempto altero medio.

Nam ex proportione $a—b = e—f$; invenitur $a+f = b+e$; ex hac autem aequatione:

$$a = b+e—f; \begin{cases} b=(a+f)—e; \\ e=(a+f)—b. \end{cases}$$
$$f = b+e—a.$$

Atqui *a* et *f* ſunt extremi, *b* et *e* ſunt interni; ergo etc.

Coroll. 2. Quodſi ergo tres termini proportionis arithmeticae dentur: ſemper quartus inveniri poteſt.

1) *Exemplum.* Dum Lincii horologia indicant 1 hor. 39 minuta; tunc Viennae eſt 1 hor. 31 minuta; quota erit Viennae, dum Lincii eſt 7 hor. 17 minuta? Erit (1 hor. 39′)— (1 hor. 31′) = (7 hor. 17′)—x; ergo x = (1 hor. 31′ + 7 hor. 17′) — (1 hor. 39′) = 7 hor. 9′.

2) *Exemplum.* Ex horologiis juxta ſe poſitis unum indicat 7 hor. 21′, alterum 11 hor. 47′. Quotam deberet alterum indicare, cum prius itidem 11 hor. 47′ jam attigit, poſito caſu, ambo aequali celeritate moveri? Quia

7 hor. 21′—11 hor. 47′=11 hor. 47′—x; erit x=4 hor. 13′.

§. 189. Si quaecunque quatuor magnitudines ita ſint comparatae, ut ſumma extremarum aequetur ſummae mediarum: magnitudines tales ſemper proportionem arithmeticam conſtituunt.

Demonſtratio. Sint enim hae 4 magnitudines, *k*, *l*, *m*, *n* tales, ut ſit

$$k+n=l+m.$$

Facile ex hoc invenies, eſſe: $k = (l+m)—n$,

et $(k-l)=(m-n)$, quod proportionem arithmeticam conſtituit.

§. 190. *Coroll.* Cum in quavis proportione arithmetica ſumma extremorum aequalis ſit ſummae mediorum; et quaevis quatuor quantitates ſemper proportionem arithmeticam conſtituant, ſi ſumma terminorum extremorum aequetur ſummae mediorum; in quavis proportione arithmetica termini medii, vel extremi inter ſe invicem permutari poſſunt; extremi loco mediorum, et medii loco extremorum poni (ſubſtitui) poſſunt; alterutri extremorum, et alterutri mediorum aequalia addi; vel aequalia ſubtrahi, ab utroque poſſunt; vel denique alterutri extremorum vel mediorum tantum addi poteſt, quantum ab altero eorumdem terminorum ſubtrahitur. Semper enim erit ſumma extremorum aequalis ſummae mediorum. Id eſt, ſi fuerit $a-b=e-f$; erit quoque

$$a-e=b-f$$
$$f-b=e-a$$
$$f-e=b-a; \text{ ſeu}$$
$$b-a=f-e$$
$$b-f=a-e$$
$$e-a=f-b$$
$$e-f=a-b; \text{ et porro}$$

$$(a+n)-b=(e+n)-f$$
$$(a+n)-(b+n)=e-f$$
$$a-(b+n)=e-(f+n)$$
$$a-b=(e+n)-(f+n); \text{ ſeu}$$
$$(a-n)-b=(e-n)-f$$
$$(a-n)-(b-n)=e-f$$
$$a-(b-n)=e-(f-n)$$
$$a-b=(e-n)-(f-n); \text{ et denique}$$

$(a+n)-b=e-(f-n)$
$(a-n)-b=e-(f+n)$
$a-(b+n)=(e-n)-f$
$a-(b-n)=(e+n)-f.$

Quodsi enim prima proportio $(a-b)=(e-f)$ vera sit; erit etiam $a+f=e+b$, hinc etiam in omnibus reliquis proportionibus indicatis summa extremorum aequalis summae mediorum; quare et hae verae sunt.

§. 191. *Theorema.* Quodsi in proportione arithmetica unus terminus externus major fuerit uno termino interno; alter externus minor erit altero medio, et vicissim: et si unus externus aequalis fuerit uni medio, alter extremus etiam aequalis alteri medio erit.

Demonstratio. Nam si $a-b=e-f$; erit quoque $a+f=b+e$. Si ergo fuerit $a>e$; erit utrinque subtrahendo,

$f<b$, seu
$b>f$ (§. 18. Nr. 2. Arith. Elem.).

Et ab $a+f=b+e$
$a<e$, utrinque subtrahendo

erit $f>b$, seu
$b<f$ (§. 18. Nr. 2. Arith. Elem.).

Et ab $a+f=b+e$
$a=e$ utrinque subtrahendo,

erit $f=b$ (§. 18. N. 1. Arith. Elem.). Q. E. D.

Caput III.

De Proportione arithmetica continua.

§. 192. *Proportio arithmetica continua* illa eſt, in qua termini medii, vél extremi iidem ſunt. Ut $a-c = c-b$.

Terminus c vocatur *medius arithmetice proportionalis* inter a et b (ad a et b); b dicitur *tertius arithmetice proportionalis* ad a et c; a dicitur 3*tius arithm. proportionalis* ad b et c.

§. 193. *Theorema.* In proportione arithmetica continua terminus medius aequalis eſt ſemiſummae amborum reliquorum; atque ſemiſumma duarum quantitatum etiam eſt media arithmetice proportionalis inter easdem.

Demonſtratio. 1) In proportione arithmetica continua $a-c = c-b$, eſt ſemper

$a+b = c+c = 2c$. Ex qua aequatione

$$\frac{a+b}{2} = c.$$

2) Sit $p = \frac{m+n}{2}$; erit $2p = m+n$; et (§. 189.)

$m-p = p-n$; proportio arithmetica continua.

Quare in $7-5 = 5-3$, erit $\frac{10}{2} = 5 = \frac{7+3}{2}$. Et $\frac{8+5}{2}$ eſt medius arithm. proportiona-

lis inter 8 et 5, id est $8 - \frac{(8+5)}{2} = \left(\frac{8+5}{2}\right) - 5$, vel

$$8 - \frac{13}{2} = \frac{13}{2} - 5.$$

Proponatur Exempli gratia sequens

Problema. Praeterlapso die Martis pretium forense (annona) tritici summum erat 15 flor. 12 cruc.; minimum autem erat 13 flor. 26 cruc. quantum est pretium medium novellis indicandum?

Resolutio. Quaeratur medius arithm. proportionalis; et erit medium pretium: 15 fl. 12 cruc. +
13 fl. 26 cruc.
(28 fl. 38 cr.) : 2 =
14 flor. 19 cruc.

§. 194. *Theorema.* Inter plures datas quantitates invenitur media arithmetice proportionalis, si summa earumdem per numerum datarum quantitatum dividatur. E. g. Sint datae, *a*, *b*, *c*, *d*; erit $\frac{a+b+c+d}{4}$ quaesita media.

Demonstratio. Quippe desideratur, ut inter quasvis duas magnitudines media proportionalis determinetur; hinc

$$a - x = x - b$$
$$b - x = x - c$$
$$c - x = x - d$$
$$d - x = x - a.$$

Additis erit

$$(a+b+c+d) - 4x = 4x - (b+c+d+a).$$

Et summa extremorum seu $(2a+2b+2c+2d)$ $=8x$ summae mediorum; seu $a+b+c+d=4x$; ergo $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)=x$. Idem demonstr. de plur.

Exemplum. Quaeritur pretium medium secalis in provincia, cum annona secalis esset in

primo loco	=	13	fl.	12	crucif.
in altero	=	14	fl.	24	cruc.
in tertio	=	16	fl.	30	cruc.
in quarto	=	20	fl.	—	
in 5to	=	12	fl.	39	cruc.
in 6to	=	11	fl.	20	cruc. Erit

in sex locis simul = 88 fl. 5 cruc.; et

$\frac{88 \text{ fl. } 5 \text{ cruc.}}{6}$ = 14 flor. 40 cruc. $\frac{5}{6}$ = pretio medio secalis in Provincia.

Caput IV.

De Progressione arithmetica.

§. 195. *Progressio arithmetica* est series numerorum (quantorum), qui continuo aequali quantitate crescunt, vel decrescunt. Ita sequentes series:

a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 etc.
b) 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35 etc.
c) 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, —1, —2, —3, —4, —5 etc.
d) 12, 8, 4, 0, —4, —8, —12, —16, —20, —24 etc.

sunt progressiones arithmeticae. Prima enim crescit continuo unitate; secunda continuo crescit terna-

rio; 3tia decrescit 1; et 4ta decrescit continenter quaternario.

§. 196. Numerus indicans, quantum termini (Glieder) progressionis crescant, vel decrescant (quo adscendunt vel descendunt), dicitur *differentia progressionis.* In 1ma serie est differentia = 1; in 2da = 3; in 3tia = — 1; in 4ta = — 4. *Termini* progressionis sunt ipsi numeri vel quantitates ipsae; et numeri naturales supra terminos progressionis competentes scripti appellantur *indices* (indicatores, Zeiger) progressionis; ultimus talis nominator dicitur *numerus terminorum* (Anzahl der Glieder).

§. 197. *Coroll.* 1. Quodsi differentia progressionis ad quemcunque terminum addatur: obtinetur proxime major, si haec est positiva, et proxime minor terminus, si haec negativa est. Cumprimum ergo unus terminus progressionis una cum ejus differentia dentur; facile etiam omnes reliqui termini ejusdem continuatim inveniri possunt.

Sit enim terminus primus = 5, differentia = 4; erit progressio sequens: $\overset{1}{5}, \overset{2}{9}, \overset{3}{13}, \overset{4}{17}, \overset{5}{21}, \overset{6}{25}$ etc.

Sit terminus primus = 9, differentia = (—2); erit series: 9, 7, 5, 3, 1, — 1, — 3, — 5, — 7, — 9, — 11, — 13, — 15, — 17, — 19, et ita porro.

Sit denique generaliter terminus primus = *a*, et differentia = ± *d*; erit progressio sequens:

$\overset{1}{a}, \overset{2}{a+d}, \overset{3}{a+2d}, \overset{4}{a+3d}, \overset{5}{a+4d}, \overset{6}{a+5d}, \overset{7}{a+6d}, \overset{8}{a+7d}, \text{- - - - - -}\ \overset{100}{a+99d}, \text{- - - - - -}\ \overset{n}{a+(n-1)d},$ si differentia sit positiva. Et

1 2 3 4 5 6 7
a, a—d, a—2d, a—3d, a—4d, a—5d, a—6d,
8 100 n.
a—7d - - - - - - , a—99d - - - - , - , a—(n—1)d,
si differentia est negativa.

Coroll. 2. Quilibet ergo terminus aequalis est termino primo, plus producto ex differentia in proxime minorem indicem progressionis; vel si *n*tesimus, id est quivis terminus dicatur *w*, erit ultimus terminus, seu $w = a \pm (n-1)d$; id est: ultimus terminus aequalis summae (vel differentiae) ex termino primo, et differentia ducta in numerum terminorum 1te minutum.

Coroll. 3. Cum itaque inter has quatuor quantitates, terminum 1mum *a*, differentiam *d*, ultimum terminum *w*, et numerum terminorum *n*, aequatio primi gradus

$$w = a \pm (n-1)d$$

detur; potest ex hac *aequatione termini ultimi* datis earumdem tribus, semper et quarta quantitas inveniri.

Scholion. Sequentia Problemata facile ex hac aequatione mera substitutione resolvuntur.

§. 198. 1) Quidam mercatus est 40 partes panni, 1mam partem 5 fl., 2dam 7 fl., 3tiam 9 fl. et quamvis partem sequentem 2 fl. plus. Quanti ultimam partem?

Resolutio et Demonstratio. Cum pretia panni progressionem arithmeticam constituant, cujus terminus 1mus $= a = 5$; differentia $d = 2$; numerus terminorum $n = 40$; erit substitutis valoribus his in aequatione termini ultimi, $w = a + (n-1)d$,

valor partis 40mae seu $w = 5 + (40 - 1)2 = 5 + 39 \times 2 = 5 + 78$, seu $w = 83$ flor.

Problema. 2. Sint progressioni cuipiam 16 termini; primus $= 2$; ultimus $= 90$ etc. Quaeritur differentia, qua termini crescunt.

Resolutio. Quoniam $a = 2$; $w = 90$; $n = 16$; erit substitutis valoribus in $w = a + (n - 1)d$:
$90 = 2 + (16 - 1)d$. Ex hac aequatione erit
$90 = 2 + 15d$; et $90 - 2 = 15d$; seu
$\frac{88}{15} = d$; seu $5\frac{13}{15} = d =$ differentiae quaesitae.

Scholion. Inventa jam differentia facile est invenire singulos omnes 16 terminos.

Problema. 3. Progressio crescat binario, ejus terminus 1mus $= 6$; ultimus $= 100$. Quaeritur, quot terminos illa habeat?

Resolutio. Quia $a = 6$; $d = 2$; $w = 100$; erit substituendo hos valores in aequatione ultimi termini $w = a + (n - 1)d$:
$100 = 6 + (n - 1)2 = 6 + (2n - 2)$, seu
$100 = 4 + 2n$; ergo $100 - 4 = 2n$; et
$\frac{96}{2} = n$; et $48 = n =$ numero terminorum quaesito.

§. 199. *Theorema.* Omnis progressio arithmetica nihil aliud est, quam prolongata continua proportio arithmetica, vel proportio arithmetica continua nihil est aliud, quam progressio arithmetica tribus duntaxat terminis constans.

Demonstratio. Sit ad primum, terminus progressionis primus $= a$, et differentia $= d$; erit progressio haec
$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, \ldots a + (n - 1)d$, in qua quivis terminus una

differentia *d* plus continere debet, quam proxime vel immediate praecedens terminus. Verum
$a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$ seu $1-2=2-3$
$(a+d)-(a+2d)=(a+2d)-(a+3d)$ seu $2-3$
$=3-4$
$(a+2d)-(a+3d)=(a+3d)-(a+4d)$ seu $3-4$
$=4-5$
$(a+3d)-(a+4d)=(a+4d)-(a+5d)$ seu $4-5$
$=5-6$; et ita porro; et
$a+(n-3)d-[a+(n-2)d]=[a+(n-2)d]-a+(n-1)d$;

quia in omnibus summa extremorum aequalis fit summae mediorum. Atqui hi termini constituunt proportionem arithmeticam continuam; ergo omnis progressio arithmetica est proportio arithmetica continua. Ad secundum sit proportio continua arithmetica;

$$a-c=c-e;$$

erit $a-c=d$; et $c-e=d$; nam proportio est aequalitas harum duarum rationum (§. 186.); ergo $c=a-d$; et $c=d+e$. Substitoque valore loco *c* in proportione, erit $a-c=c-e=a-(a+d)=(a+d)-e$; hinc $e=2a+2d-a=a+2d$. Igitur $a-c=c-e=a-(a+d)=(a+d)-(a+2d)$. Sed hi termini constituunt progressionem arithmeticam; ergo etiam $\overset{1}{a}-\overset{2}{c}=c-\overset{3}{e}$. Quare *a*, *c*, *e* sunt termini progressionis arithmeticae.

Coroll. 1. Quivis terminus progressionis arithmeticae est medius arithmetice proportionalis inter quosvis duos alios terminos, ab illo aequidistantes. Erit enim semper summa terminorum extremorum aequalis duplo medio. Ut

$a-(a+4d)=(a+4d)-(a+8d)$, seu
$1-5=5-9$; et
$1-6=6-11$.

Coroll. 2) Duo quivis termini cum duobus quibusvis aliis terminis, qui pari modo ut illi a se invicem distant, constituunt proportionem arithmeticam, et vicissim, duo termini priores proportionis arithmeticae semper in progressione arithmetica de qua etiam terminos constituunt tantum a se invicem distant, quantum ultimi duo. Erit enim differentia priorum aequalis differentiae postremorum. Ut

$3-4=8-9$. Et $a-(a+3d)=(a+5d)-(a+8d)$, nam $2a+8d=2a+8d$.

Coroll. 3) In omni progressione aritmetica summa terminorum duorum quorumvis ab utroque extremo aequidistantium semper est aequalis summae extremorum. Id est: in omni arithmetica progressione terminus primus plus ultimo, secundus et penultimus, tertius et antepenultimus, et ita porro semper eandem dant summam. Constituunt enim hi termini proportionem arithmeticam (Coroll 2.), in qua summa mediorum aequatur summae extremorum. Ut in progressione hac:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12;
$1+12=2+11=3+10=4+9=5+8=6+7=13$.

Coroll. 4) Summa igitur omnium terminorum arithmeticae progressionis invenitur, si summa extremorum toties sumitur, quot paria termino-

rum progressio continet, vel si summa terminorum extremorum in numerum terminorum dimidium ducatur. Id est $S = (a+w)\frac{n}{2}$; si S = summae, et caeterae literae cognita indicant. Dant enim paria terminorum dimidium numerum terminorum, et quot paria sunt terminorum, toties summa extremorum sumenda est, ut summa integra terminorum inveniatur.

§. 200. *Problema.* Invenire summam terminorum progressionis arithmeticae, vel potius ejusdem generalem formulam.

Resolutio et Demonstratio. Sit haec summa $= S$.

Erit $S = \overset{1}{a} + (a+\overset{2}{}d) + (a+\overset{3}{}2d) + (a+\overset{4}{}3d)$ etc.; seu

$S = (a+\overset{4}{}3d) + (a+\overset{3}{}2d) + (a+\overset{2}{}d) + \overset{1}{a}$; addendo erit

$2S = (2a+3d) + (2a+3d) + (2a+3d) + (2a+3d)$ etc.; id est

$2S = (2a+3d) \times 4$; ergo

$S = (2a+3d) \times \frac{4}{2}$. Sed $2a+3d$ = primo + ultimo termino, et 4 denotat numerum terminorum; hinc erit generaliter $S = (a+w)\frac{n}{2}$. Hoc est:

Summa terminorum progressionis arithmeticae aequalis est summae termini primi et ultimi ductae in dimidium numerum terminorum; ut in praecedenti Coroll. 4.

Aliter.

Quoniam terminus ultimus seu $w = a + (n-1)d$ (§. 197.), erit $a = w - (n-1)d$; ergo 2dus terminus $= w - (n-2)d$; 3tius $= w - (n-3)d$, et ita porro, dum progressio retrograda repraesentatur. Erit progressio adscendens; $S = a, a+d, a+2d, a+3d \ldots +w$, et retrograd. $S = w, w-d, w-2d, w-3d \ldots a$; ergo

additis: $2S = a+w, a+w, a+w, a+w, \ldots a+w$;

seu $2S = (a+w) \times n$; ergo

$$S = (a+w)\frac{n}{2}.$$

Coroll. Quodsi igitur *S*, summam omnium terminorum, *w* ultimum, *a* primum terminum, et *n* numerum eorumdem exprimat; erit

$$S = (a+w)\frac{n}{2}$$

iterum aequatio quatuor magnitudinum, ex qua quaevis inveniri potest, simul ac tres reliquae cognitae sint.

Scholion. Ex praecedenti aequatione Summae sequentia resolvuntur Problemata.

§. 201. *Problema.* 1) Invenire summam (*n*) numerorum imparium.

Resolutio. Summa progressionis numerorum imparium semper aequalis est quadrato numeri terminorum.

Demonstratio. In numeris imparibus ut: 1, 3, 5, 7, 9, etc. terminus primus $a = 1$; et differentia $= 2$; si ergo in generali formula summae $S = (a + w)\frac{n}{2} = (a + a + (n - 1)d)\frac{n}{2}$, quia $w = a + (n - 1)d$, debite substituatur; erit hic $S = (1 + 1 + (n - 1)2)\frac{n}{2}$, ergo $S = [1 + 1 + (2n - 2)]\frac{n}{2}$, seu

$$S = (2 + 2n - 2)\frac{n}{2} = 2n \times \frac{n}{2} = n^2.$$

Coroll. 1) Invenitur ergo summa cujusvis numeri terminorum numerorum imparium: si numerus terminorum datus elevatur ad quadratum. Ita summa primorum 10 numerorum imparium $= 10^2 = 100 = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 = (1 + 19)5$.

Coroll. 2) Et vice versa, quadratum cujusvis numeri integri invenitur: si tot numeri impares continui addantur, quot unitates numerus datus continet. V. g. quadratum senarii habetur $= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$.

§. 202. *Problema.* 3) Mercatus est quidam plures species panni, primam 20 fl., ultimam 98 fl.; pro omnibus simul solvit 826 fl. Quot erant partes?

Resolutio. $S = 826$; $a = 20$; $w = 98$. Sed $S = (a+w)\frac{n}{2}$; hinc erit ſubſtitutis valoribus

$$826 = (20+98)\frac{n}{2}; \text{ et } 826 = 118 \times \frac{n}{2}; \text{ ſeu } = \frac{118n}{2}.$$ Ergo $826 = 59 . n$; et $\frac{826}{59} = n$; ſeu $14 = n$. Ergo 14 partes mercatus.

Problema. 4) Sub conditione data, ſi 14 partes mercatus ſit, quantum ſolvebat pro omnibus in ſumma?

Resolutio. $a = 20$; $w = 98$; $n = 14$; hinc cum $S = (a+w)\frac{n}{2}$, erit $S = (20+98)\frac{14}{2} = 118 \times 7 = 826$.

Problema. 5) Terminus ultimus progreſſionis arithmeticae $= 207$; numerus terminorum $= 71$; et ſumma omnium terminorum $= 7428$. Quaeritur terminus primus.

Resolutio. Quia $S = (a+w)\frac{n}{2}$; erit

$$7428 = (a+207)\tfrac{71}{2}; \text{ et}$$
$$14856 = (a+207)71; \text{ et}$$
$$\tfrac{14856}{71} = (a+207); \text{ ſeu}$$
$$209\tfrac{17}{71} = a+207; \text{ ergo}$$
$$209\tfrac{17}{71} - 207 = a; \text{ ſeu}$$
$$2\tfrac{17}{71} = a = \text{termino primo quaeſito.}$$

Problema. 6) Sint 400 fl. inter 40 pauperes distribuendi, ut primus 20 crucif. et quivis sequens aequali differentia plus accipiat, quam proxime praecedens. Quantum accipiet ultimus?

Resolutio. Cum $a = 20$; $S = 400$ fl. $= 24000$ cruc.; $n = 40$; et $S = (a + w)\frac{n}{2}$; erit substituendo valores: $24000 = (20 + w)\frac{40}{2} = (20 + w)20$; seu $\frac{24000}{20} = (20 + w)$; seu $1200 = 20 + w$; et $1200 - 20 = w$; seu 1180 crucif. $= w$; id est 19 flor. 40 crucif. $= w$.

§. 203. *Coroll.* 1) Cum itaque in quavis progressione arithmetica hae duae aequationes

$$w = a \pm (n - 1)d; \text{ et}$$

$$S = (a + w)\frac{n}{2}$$

locum habeant; semper ex datis his 5 quantitatibus *a*, *d*, *w*, *n*, *S* cognitis, etiam reliquae duae quantitates inveniri possunt.

Quodsi enim tres cognitae in una aequatione contineantur; facile quarta invenitur. Et si tres datae in una aequatione non reprehendantur, sed in ambabus sint dissipatae, primum ex una, et tum ex altera aequatione eadem incognita quaeritur: comparando hos duos valores ejusdem incognitae devenitur ad aequationem, quae unam incognitam duntaxat continet.

Sint V. g. *a*, *n*, et *d* cognitae; quaeratur *w*; hoc valore de *w* in valore de *S* substituto, obtinetur

et valor istius *S*. Ac quodsi cognitae sint *a*, *n*, et *S*; tunc quaeritur ex *S* valor de *w*, hic substituitur in valore de *w*, et obtinetur valor de *d*.

Coroll. 2) Ex his promanant sequentes formulae:

I. $w = a + (n - 1)d$; ex hac invenitur

1) $a = w - (n - 1)d = w - nd - d$.

2) $d = \frac{w - a}{n - 1}$.

3) $n = \frac{w - a + d}{d}$.

II. $S = (a + w)\frac{n}{2}$; ex qua

1) $a = \frac{2S}{n} - w$.

2) $w = \frac{2S}{n} - a$.

3) $n = \frac{2S}{a + w}$.

Consequenter etiam ex duobus valoribus de *w*, *a*, et *n*, erit:

III. a) $a + (n - 1)d = \frac{2S}{n} - a$; (in qua nullum *w*);

b) $w - (n - 1)d = \frac{2S}{n} - w$; (in qua nullum *a*);

c) $\frac{w - a + d}{d} = \frac{2S}{a + w}$ (in qua nullum *n* occurrit).

Ex a) $a+(n-1)d=\frac{2S}{n}-a$; erit

$2a+(n-1)d=\frac{2S}{n}$; seu

$2an+(n-1)dn=2S$; hinc

$S=\frac{2an+(n-1)dn}{2}=\frac{an+(n-1)dn}{2}$; et ita porro.

Scholion. Numerus formularum, praedicta methodo jam inveniendarum 20 non excedit, et quas, cum in plerisque compendiis Matheseos reprehendantur hic omittere licet.

Caput V.

De Ratione geometrica duarum quantitatum.

§. 204. *Ratio geometrica* nihil aliud est, quam quotus duarum magnitudinum per ipsas magnitudines expressus. Ita quodsi $a:b=q$ sit;

$(a:b)$ est *ratio* ipsa quantitatis a ad b; et a vocatur *antecedens*, b *consequens*, et q *exponens rationis.* Ratio $a:b=q$ pronunciatur: (a) ad (b) aequale q (id est, ratio istius a ad b aequalis est q), loco: a divisum per b aequale q.

Si ratio tantum effertur, quivis Algebraista geometricam subintelligit rationem.

Ratio dicitur *major*, cujus exponens est major, *minor*, cujus exponens minor est. Rationes audiunt

et ſunt *aequales*, quarum exponentes vel quoti aequales ſunt. Ratio *creſcens* habet antecedentem m[illegible] conſequente; ratio *decreſcens* eſt, cujus an[illegible]ens minor eſt ſuo conſequente.

minorem

Coroll. 1) Quodſi duae ex tribus his magnitudinibus, antecedente, conſequente, et quoto cognitae fuerint; ſemper etiam tertia inveniri poterit.

Sit enim generaliter antecedens $= a$, conſequens $= b$, quotus vel exponens $= q$; erit $a : b = q$ (per defin.); ergo $\frac{a}{b} = q$ (per eand. defin.); hinc $a = bq$; ergo et $b = \frac{a}{q}$ (§. 34. Cor. Arith. Elem.);

Sit $\frac{3}{8} : \frac{5}{4} = x$, erit exponens ſeu $x = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$
Sit $x : \frac{5}{6} = 8$; erit antecedens $x = \frac{40}{6} = 6\frac{2}{4}$.
Sit $\frac{3}{8} : x = 5$; erit conſequens $x = \frac{3}{40}$.

Coroll. 2) Quodſi termini numeri fuerint; obtinetur exponens q, ſi antecedens per conſequentem dividatur. E. g. in ratione $3 : 4$ erit exponens $= \frac{3}{4}$. Nam cum $3 = 4q$; erit $q = \frac{3}{4}$.

Coroll. 3) Cum Antecedens ex conſequente per ſe produci debeat; hinc termini homogenei eſſe debent (Prolegom. §. 3.).

Coroll. 4) Cum exponens vel numerus integer, vel fractus ſit; ille determinat, quoties quantitas prima vel ſecundam ipſam (§. 21.), vel certam partem aliquotam ejus contineat; ergo exponentem rationis geometricae duarum quantitatum invenire nihil aliud eſt, quam primam

per fecundam metiri (§. 19.), igitur in doctrina de rationibus geometricis totius Matheseos finis et modus nititur (§. 19. Coroll. 3.).

Coroll. 5) Omnes rationes aequalitatis sibi aequantur: id est $a:a = b:b$ Nam in utraque est exponens $= 1$ (§. 29. Coroll. 2.).

Coroll. 6) Si duae rationes tertiae aequales sint; inter se aequales erunt, id est, quodsi fuerit

$$\begin{array}{l} a:b = f:g, \text{ et} \\ c:d = f:g; \text{ erit} \\ \hline a:b = c:d. \end{array}$$

Nam si duo exponentes ut numeri uni eidemque tertio aequales sint; inter se ipsos aequales sunt (§. 4. Coroll. 5.).

Coroll. 7) In quavis ratione est antecedens ad consequentem, sicut exponens ad unitatem, id est, si in ratione $a:b$ exponens sit $= q$; erit $a:b = q:1$. Nam in ratione $q:1$ ille exponens

est $= \frac{q}{1}$ (Coroll. 2. §.); ergo itidem $= q$ (§. 34. Coroll. 5.); ergo rationes $a:b$, et $q:1$ sunt aequales (per defin.),

§. 206. *Theorema.* Ratio geometrica constans (eadem) manet, si tam antecedens quam consequens ejusdem per idem multiplicetur, aut dividatur.

Demonstratio. Quotus non mutatur, si tam dividendus quam divisor per idem multiplicentur, aut dividantur (§. 40.); sed ratio geometrica est quotus duarum quantitatum per quantitates

ipsas expressus (per defin.); ergo etiam illa non mutatur si antecedens et consequens per idem multiplicetur et dividatur.

Id est $an : bn = a : b$; est enim

$$an : bn = \frac{an}{bn} = \frac{a}{b} = a : b. \text{ Et}$$

$$am : bm = \frac{am}{m} : \frac{bm}{m} = a : b, \text{ quia } am : bm =$$

$$\frac{am}{bm} = \frac{am : m}{bm : m} = \frac{a}{b} = a : b.$$

Coroll. 1) Quotiescunque igitur antecedens et consequens communem habuerint divisorem; illi per hunc dividi, et ratio in simplicioribus terminis exprimi poterit. Ita erit

$amn : bmn = a : b.$

$36 : 18 = \frac{36}{18} : \frac{18}{18} = 2 : 1.$

$100 : 1000 = 1 : 10.$

Coroll. 2) Hoc ex fundamento etiam quaevis ratio in fractionibus data, per numeros integros exprimi potest, si antecedens et consequens per denominatores harum fractionum multiplicentur.

Ita erit $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Est enim

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \text{ (§. 55.)} = ad : bc \text{ (per def.)}$$

$\frac{3}{6} : \frac{3}{5} = 15 : 18.$

§. 206. *Theorema.* Si antecendentes et consequentes aequalium rationum addantur; enascitur iterum ratio nova aequalis priori.

Demonstratio. Sint enim sequentes rationes aequales, ut

$a:b = q$
$m:n = q$
$p:r = q$; erit $a = bq$
$m = nq$
$p = rq$ (§. 204. Cor. 1.); et aequalia addendo erit $(a+m+p) = (bq+nq+rq)$; seu factoribus expositis:
$a+m+p = (b+n+r)q$; seu

$$\frac{a+m+p}{b+n+r} = q;$$ id est (per defin. rationis)

$(a+m+p):(b+n+r) = q$. Hinc (§. 204. Coroll. 6.)
$(a+m+p):(b+n+r) = a:b = m:n = p:r$.

Cum hoc verum reprehendatur, quoties quotcunque assumantur rationes aequales, quia semper summa quotcunque antecedentium divisa per summam quotcunque consequentium aequalis erit eidem exponenti; ratio nova ex prioribus enascens semper erit aequalis priori.

Coroll. Ergo inter summam antecedentium et summam consequentium aequalium rationum ea ratio valet, quae inter quemvis antecedentem et suum consequentem habetur, una ergo aequalis est alteri.

Ita quia $6:3$ aequalis est huic:
$4:2$; etiam erit

$(6+4):(3+2) = 6:3$, vel
$10:5 = 4:2$ vel $= 6:3$.

Et si fuerint $6:3 = 2$
$4:2 = 2$
$8:4 = 2$
$10:5 = 2$; erit quoque

$28:14 = 2$; ergo etiam
$28:14 = 6:3 = 4:2 = 8:4 = 10:5$.

§. 207. *Theorema.* Si antecedentes et consequentes rationum aequalium a se invicem subtrahantur; semper iterum aequalis ratio emergit.

Demonstratio. Sint $a:b = q$, et
$m:n = q$: erit

$a = bq$, et
$m = nq$ (§. 204. Cor. 1.); subtrahendo aequalia, est

$a - m = bq - nq$, seu expositis factoribus:
$a - m = (b - n)q$, et
$$\frac{a-m}{b-n} = q;$$ seu
$(a - m):(b - n) = q$. Igitur
$(a - m):(b - n) = a:b = m:n$ (§. 204. Cor. 6.).

Coroll. Differentia igitur antecedentium duarum aequalium rationum et differentia consequentium earumdem eandem vel aequalem rationem servant inter se, quae inter quemvis antecedentem et suum consequentem valet. Una ergo aequalis est alteri.

§. 208. *Ratio composita* est: productum antecedentium ad productum consequentium plurium rationum. Sic ex rationibus his:

a:b
c:d
e:f
p:r; oritur ratio composita

acep: *bdfr*; et ex his; 1:2
3:4
7:8

composita 21:64.

§. 209. *Theorema.* Ratio composita non mutatur; si quiscunque antecedentium et qualiscunque consequentium rationum simplicium per idem (aequale) multiplicetur, aut dividatur.

Demonstratio. Sint rationes simplices hae:

a:b
c:d
e:f
b:q
d:e; erit ex illis composita

a c e b d : b d f q e. Sed dividendo per *ebd* utrumque

membrum $\frac{acebd}{ebd} : \frac{bdfqe}{ebd}$ (§. 205. Cor. 1.)

$= ac : fq$.

Consequenter erit ex datis rationibus simplicibus:

$a : b$	vel ex his	$a : 1$
$c : d$		$c : 1$
$e : f$		$1 : f$
$b : q$		$1 : q$
$d : e$		$1 : 1$

$$\frac{acebd}{ebd} : \frac{bdfqe}{ebd} = ac : fq \text{ composita.}$$

Et ex datis $a : \frac{b}{n}$	vel ex his $an : b$
$\frac{d}{m} : c$	$d : mc$
composita $\frac{ad}{m} : \frac{bc}{n}$	$= adn : bcm.$

Nempe, nulla ratio mutatur, ſi tam antecedens quam conſequens ejusdem per idem multiplicatur aut dividitur (§. 205.). Atqui productum antecedentium, et productum conſequentium multiplicatur, vel dividitur per eundem numerum: ſi quiscunque antecedentium et quiscunque conſequentium rationum ſimplicium per eundem numerum multiplicetur, aut dividatur; ergo ratio compoſita non mutatur, ſi unus ex antecedentibus et ex conſequentibus rationum ſimplicium per idem multiplicetur, aut dividatur.

Scholion. Idem nempe eſt, an productum, vel factor ejusdem per eundem numerum multiplicetur aut dividatur.

Coroll. 1) Quodſi itaque ex pluribus datis rationibus, in quibus fractiones occurrunt, ratio

composita quaerenda sit; antecedens et consequens per quemvis denominatorem multiplicari, et tunc ratio composita in numeris integris inveniri potest. E. g. Sint rationes datae $\frac{1}{3} : \frac{2}{8}$; erit fractiones exterminando, $\frac{1}{3} : \frac{2}{8} = 1 \times 8 : 2 \times 3 = 8 : 6$; et $\frac{3}{7} : \frac{2}{3} = 3 \times 3 : 2 \times 7 = 9 : 14$. Igitur ex

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{8} = 8 : 6 = 1 \times 8 : 3 \times 2$$
$$\frac{3}{7} : \frac{2}{3} = 9 : 14 = 3 \times 3 : 2 \times 7$$

$\frac{3}{21} : \frac{4}{24} = 72 : 84 = (1.\ 8.\ 3.\ 3.) : (3.\ 2.\ 2.\ 7.)$ composita.

Coroll. 2. Et quodsi unus antecedentium cum uno ex consequentibus communem habuerint divisorem; ambo per hunc dividi, et illico pro ratione composita expressio (terminus) simplicissima inveniri potest. Sint rationes

datae		et abbreviatae
7 : 4		~~7~~ : 4
8 : 14		~~8~~ : ~~14~~, ~~2~~
6 : 3		~~2~~, ~~6~~ : ~~3~~
5 : 16		5 : ~~16~~, 2;

erit composita 1680 : 2688 = 5 : 8;

$$\text{quia } \frac{7 \times 8 \times 6 \times 5}{7 \times 8 \times 3 \times 2} : \frac{4 \times 14 \times 3 \times 16}{7 \times 8 \times 3 \times 2} = 5 : 8.$$

Et sint rationes datae $2 : 4\frac{1}{3}$ vel $2 : \frac{13}{3}$
$5 : 10\frac{1}{2}$ $5 : \frac{21}{2}$
$\frac{1}{3} : 21$ $\frac{1}{3} : 20$; erit fractiones exterminando,

$2 : \frac{13}{3} = 2 \times 3 : 13 = 6 : 13$ vel ~~6~~ : 13
$5 : \frac{21}{2} = 5 \times 2 : 21 = 10 : 21$ ~~10~~ : 21
$\frac{1}{3} : 20 = 1 \times 1 : 20 \times 3 = 1 : 60.$ 1 : ~~60~~, ~~10~~

---

composita = 60 : 16380 = 1 : 273.

§. 210. *Theorema.* Ratio quaevis ($a:h$) ex omnibus intermediis rationibus composita est.

Demonstratio. Sint rationes simplices sequentes:

a : b	abbrevia-	$a:b$ vel	a : 1
b : c	tae erunt	$b:c$	1 : 1
c : d		$c:d$	1 : 1
d : e		$d:e$	1 : 1
e : f		$e:f$	1 : 1
f : g		$f:g$	1 : 1
g : h		$g:h$	1 : h; ergo composita:

$abcdefg : bcdefgh = a : h = a : h.$

Coroll. Ratio igitur composita, ex illis simplicibus, quae ita sunt comparatae, ut consequens cujusvis praecedentis semper etiam fiat antecedens sequentis, nihil aliud est, quam ratio primi antecedentis ad ultimum consequentem.

§. 211. *Theorema.* Ratio composita ex duabus, tribus, 4, vel n aequalibus rationibus aequatur 2dae, 3tiae, 4tae, vel $n$tesimae potentiae cujusvis rationum simplicium, et quaevis simplex ratio aequatur 2dae, 3tiae, 4tae, vel $n$tesimae radici rationis compositae.

Demonstratio. Sit enim $a:b = q$
$c:d = q$; erit

$ac:bd = qq$. Verum etiam est $aa:bb = qq$, et
$cc:dd = qq$; ergo

$aa:bb = cc:dd = ac:bd$ (§. 204. Cor. 6.).

Nam $\frac{a}{b} = q$ | $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = qq$:

$\frac{c}{d} = q$ | $\frac{ac}{bd} = ac : bd = qq.$

Et $\frac{a^2}{b^2} = q^2$; et

$\frac{c^2}{d^2} = q^2.$

Et consequenter cum $ac : bd = aa : bb = cc : dd$;
$\sqrt{ac} : \sqrt{bd} = \sqrt{aa} : \sqrt{bb} = a : b$, et
$\sqrt{ac} : \sqrt{bd} = \sqrt{cc} : \sqrt{dd} = c : d$.

Sit $a : b = q$, et
$c : d = q$
$m : n = q$; erit aequalia per aequalia multiplic.

$acm : bdn = q^3$. Sed est quoque
$a^3 : b^3 = q^3$
$c^3 : d^3 = q^3$
$m^3 : n^3 = q^3$ (§. 83.); hinc erit

$acm : bdn = a^3 : b^3 = c^3 : d^3 = m^3 : n^3$ (§. 204. Cor. 6.).

Et consequenter $\sqrt[3]{(acm)} : \sqrt[3]{(bdn)} = a : b = c : d = m : n$ (quia aequales potentiae aequales radices dant).

Idem cum 4, cum 5, et ita porro cum (n) rationibus valet. Ergo generaliter etc.

Scholion. Hinc quia $4 : 2$ aequalis
$6 : 3$; erit

$24 : 6 = 16 : 4 = 36 : 9$; et
$\sqrt{24} : \sqrt{6} = 4 : 2 = 6 : 3.$

§. 212. *Theorema.* Quaevis ratio $(a:b)=q$, potest converti in hanc $\left(a:\frac{a}{q}\right)$ seu $(aq:a)$.

Demonstratio. Cum $a:b=q$ sit; erit

$$a=bq; \text{ ergo } b=\frac{a}{q}.$$

Substituto loco *b* valore hoc in ratione data $a:b=q$; erit $a:b=a:\frac{a}{q}=aq:a$.

Ita $3:12=\frac{1}{4}=3:(3:\frac{1}{4})=3:\frac{12}{1}=3\times\frac{1}{4}:3$, seu $\frac{3}{4}:3=3:12$.

Caput VI.

De Proportione geometrica discreta.

§. 213. *Proportio geometrica* est aequalitas duarum rationum geometricarum.

Si $a:b=q$, et
$c:d=q$; erit (§. 204. Cor. 6.)

$a:b=c:d$ proportio geometrica; et quantitates *a*, *b*, *c*, *d* stant in proportione geometrica, vel sunt inter se (sibi) proportionales, dicunturque *termini* ejusdem; *a* et *d extremi*, *b* et *c interni* vel *medii;* atque *d quartus geometrice proportionalis* ad *a*, *b*, et *c*. Proportio ipsa ita pronunciatur: *a* habet se ad *b*, ut *c* ad *d*, vel (*a*) ad (*b*), ut (*c*) ad (*d*). Id est *a* ad *b* eandem rationem habet, ut *c* ad *d*.

Algebraistae proportionem geometricam semper absque adjectivo efferunt.

§. 214. *Theorema.* In omni proportione (cujus termini priores numeri sunt) geometrica factum extremorum aequale est facto mediorum.

Demonstratio. Sit proportio data

$a : b = c : d$; erit, cum $q = q$, et

$a : b = q$, et etiam

$c : d = q$ (per defin.);

etiam $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Et aequalia per aequalia multiplicando, erit $\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$, seu

$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}$ (§. 43.), id est

$ad = bc$, seu

$a \times d = b \times c$; ergo factum extremorum ad aequale facto mediorum bc.

Aliter. Sit proportio data $a : b = c : d$,

Quia $b = \frac{a}{q}$, et $d = \frac{c}{q}$ (§. 212.); substitutis valoribus his in proportione; erit ejus aequalis expressio haec $a : \frac{a}{q} = c : \frac{c}{q}$; ex qua

$\frac{ac}{q} = \frac{ac}{q}$ vel $acq = acq$.

Coroll. 1. Omnis proportio ergo facile convertitur in aequationem; si termini medii, et extremi in se invicem ducantur.

Schol. Theorema demonstratum sequentibus omnibus propositionibus proportionum fundamento

erit, estque ipsum character internus omnis proportionis geometricae.

Coroll. 2. In omni proportione quivis terminus extremus aequalis est facto mediorum diviso per alterum extremum, et quilibet medius aequalis facto extremorum diviso per alterum medium. In proportione a : b = c : d

est $a = \frac{bc}{d}$; nam ad = bc; ergo a = bc : d = primo externo,

$d = \frac{bc}{a}$; nam ad = bc; ergo d = bc : a = secundo externo.

$b = \frac{ad}{c}$; nam ad = bc; ergo b = ad : c = uni medio,

$c = \frac{ad}{b}$; nam bc = ad; ergo c = ad : b = alteri medio.

Coroll. 3. Potest igitur ad tres quantitates datas *a*, *b*, et *c* semper 4ta proportionalis *d* inveniri. Et in genere, quivis terminus proportionis cujuspiam per reliquos tres innotescit. Ita ex

$3 : 4 = 5 : x$	$x = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$;
$2 : 8 = x : 16$	$x = \frac{2 \times 16}{8} = 4$
$2 : x = 4 : 16$	$x = \frac{2 \times 16}{4} = 8$
$x : 8 = 4 : 16$	$x = \frac{8 \times 4}{16} = 2$.

§. 215. *Theorema.* Quodsi quatuor quantitates p, q, m et n, ita sint comparatae, ut productum duarum pn aequale sit producto mq ex duabus earumdem; hae semper etiam sibi proportionales sunt, id est constituunt proportionem.

Demonstr. Dentur secundum conditionem quantitates (p, q, m, et n), $pn = mq$; erit etiam

$\frac{pn}{q} = m$ (§. 34. Cor. 6. Arithm. Elem.), seu

$\frac{p}{q} \times n = m$, et

$\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ (§. 34. Cor. 6. Arith. Elem.), seu

$p : q = m : n$ (§. 204.).

Coroll. Potest igitur quaevis aequatio solutis ejus membris in factores, facili modo in proportionem converti, si unum membrum aequationis pro producto extremorum, alterumque pro producto mediorum terminorum assumatur.

Sit $ab = pq$; erit confiderando ab ut productum extremorum, et pq ut productum mediorum:

$$a : p = q : b$$
$$a : q = p : b$$
$$b : p = q : a$$
$$b : q = p : a;$$

vel affumendo pq pro producto extremorum, et ab pro producto mediorum, erit:

$$p : a = b : q$$
$$p : b = a : q$$
$$q : a = b : p$$
$$q : b = a : p.$$

§. 216. *Theorema.* Omnis proportio permutando terminos medios et extremos octuplo modo repraefentari poteft.

Demonftratio. Cum in proportione productum extremorum femper producto mediorum aequetur; ac quatuor quantitates femper etiam fint proportionales cumprimum productum extremorum aequale fit producto mediorum: termini proportionis tot modis (toties) permutari vel alternari poffunt, quot modis (quoties) poffibile eft, ut illi permutentur vel alternentur, quin aequalitas inter productum extremorum et productum mediorum tollatur. Quodfi autem in quavis proportione ambo medii, vel ambo extremi invicem permutentur, aut etiam par mediorum cum pari extremorum; producta mediorum et extremorum femper eadem manent, igitur etiam proportio immutata manet.

Quodsi itaque sit

$a:b = c:d$; erit etiam permutatis mediis

$a:c = b:d$; permutatis extremis in 1ma

$d:b = c:a$; permutatis extremis in 2da

$d:c = b:a$; permutando par extrem. cum medior.

$b:a = d:c$; permutatis mediis in hac

$b:d = a:c$; permutatis extremis 5tae

$c:a = d:b$; permutando extremos in 6ta

$c:d = a:b$.

§. 217. *Theorema.* Proportio non turbatur, si alteruter terminus medius et alteruter extremus ejusdem per idem (aequale) multiplicetur, aut dividatur.

Demonstratio. Sit enim $a:b = c:d$; erit etiam

$an:b = cn:d$;

$an:bn = c:d$;

$a:bn = c:dn$;

$a:b = cn:dn$. Vel $\frac{a}{n}:b = \frac{c}{n}:d$;

$$\frac{a}{n}:\frac{b}{n} = c:d;$$

$$a:\frac{b}{n} = c:\frac{d}{n};$$

$$a:b = \frac{c}{n}:\frac{d}{n}.$$

Nam si terminus quiscunque medius et extremus proportionis cujuspiam per eundem numerum multiplicentur, aut dividantur; etiam productum mediorum et productum extremorum per eundem multiplicatur, aut dividitur; pro-

ducta igitur haec iterum inter se aequalia manent. Ergo proportio non turbatur etc.

§. 218. *Theorema.* Proportio non mutatur, si unus mediorum per quemvis numerum multiplicetur, alterque per eundem dividatur, vel simili modo unus extremorum per quemlibet numerum multiplicetur, et alter extremus per eundem dividatur.

Demonstratio. Productum non mutatur, si unus factorum suorum per quemlibet multiplicetur numerum, alterque per eundem dividatur. Si ergo fuerit $a:b = c:d$; erit quoque

$$a:bn = \frac{c}{n} : d$$

$$a : \frac{b}{n} = cn : d$$

$$an : b = c : \frac{d}{n}$$

$$\frac{a}{n} : b = c : dn;$$ cum in quavis harum proportionum productum mediorum aequale sit producto extremorum.

§. 219. *Theorema.* In quavis proportione est summa vel differentia duorum terminorum priorum (1mae rationis) ad primum vel secundum, sicut se habet summa vel differentia duorum postremorum (amborum rationis secundae) ad tertium vel quartum; atque porro summa amborum priorum ad eorum differentiam, ut summa amborum postremorum ad differentiam amborum postremorum.

Demonstratio. Quodsi enim fuerit $a:b = c:d$; erit 1mo $(a+b):b=(c+d):d$. Nam

$$\begin{aligned} ad &= bc, \text{ et} \\ bd &= bd; \text{ ergo etiam addendo} \end{aligned}$$

$ad+bd=bc+bd$, seu expositis factoribus
$(a+b)d=(c+d)b$; et

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ (§. 34. Cor. 6. Arith.), ergo}$$

$(a+b):b=(c+d):d$ (§. 204.).

2do $(a-b):b=(c-d):d$. Est enim

$$\begin{aligned} ad &= bc \\ bd &= bd; \text{ ergo subtrahendo} \end{aligned}$$

$ad-bd=bc-bd$, seu
$(a-b)d=(c-d)b$, et

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \text{ (§. 34. Cor. 6. Arith.); ergo}$$

$(a-b):b=(c-d):d$ (§. 204.).

3tio $(b-a):b=(d-c):d$. Est enim

$$\begin{aligned} bd &= bd, \text{ et} \\ ad &= bc; \text{ ergo subtrahendo} \end{aligned}$$

$bd-ad=bd-bc$, seu
$(b-a)d=b(d-c)$; et

$$\frac{b-a}{b}=\frac{d-c}{d} \text{ (§. 34. Cor. 6. Arith.); ergo}$$

$(b-a):b=(d-c):d$ (§. 204.).

4to $(a+b):a=(c+d):c$. Eſt enim

$bc=ad$

$ac=ac$; ergo aequalia aequalibus addendo

$bc+ac=ad+ac$; ſeu

$(b+a)c=(d+c)a$; ſeu

$\frac{a+b}{a}=\frac{d+c}{c}$ (§. 34. Cor. 6. Arith.); ergo

$(a+b):a=(c+d):c$.

5to $(a-b):a=(c-d):c$. Nam

$ac=ac$

$bc=ad$; ergo ſubducendo

$ac-bc=ac-ad$, ſeu

$(a-b)c=(c-d)a$; et

$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$ (§. 34. Cor. 6. Arith.); ergo

$(a-b):a=(c-d):c$.

6to $(b-a):a=(d-c):c$. Eſt enim

$bc=ad$, et

$ac=ac$; ergo ſubtrahendo

$bc-ac=ad-ac$; ſeu

$(b-a)c=(d-c)a$; et

$\frac{b-a}{a}=\frac{d-c}{c}$ (§. citato); ergo

$(b-a):a=(d-c):c$ (§. 204.).

Porro 7to $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

Est enim $bc=ad$, et

$ad=bc$; ergo subtrahendo

$bc-ad=ad-bc$; sed est quoque

$ac-bd=ac-bd$; hinc addendo utrinque

$bc+ac-ad-bd=ad+ac-bc-bd$; seu

$(b+a)c+(a+b)d=(d+c)a-(c+d)b$; et

$(a+b)(c-d)=(c+d)(a-b)$; vel

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (§§. citatis); ergo

$(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d)$.

Denique 8vo $(a+b):(b-a)=(c+d):(d-c)$.

Nam $ad-bc=bc-ad$,

$bd-ac=bd-ac$, utrinque additis

$ad+bd-bc-ac=bc+db-ad-ac$; seu

$(a+b)d-(b+a)c=(c+d)b-(d+c)a$; et

$(a+b)(d-c)=(c+d)(b-a)$; seu (§. 34. Cor. 6. Arith.)

$\frac{a+b}{b-a}=\frac{c+d}{d-c}$; ergo (§. 220.)

$(a+b):(b-a)=(c+d):(d-c)$.

Scholion. Ratio secunda proportionis eandem mutationem subire debet, quae cum prima ratione inita est.

§. 220. Quoties quatuor quantitates proportionales fuerint; etiam earum potentiae homologae (similes), vel earum radices similes proportionales erunt, et vicissem.

Demonstratio. Sit enim $a:b=c:d$; erit

$ad=bc$, ergo

1mo $(ad)^n = (bc)^n = a^n \times d^n = (b^n \times c^n$ (§. 81.);

seu $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} = a^n : b^n = c^n : d^n$ (§. 204.).

Et 2do $\sqrt[n]{ad} = \sqrt[n]{bc}$, seu

$(ad)^{\frac{1}{n}} = (bc)^{\frac{1}{n}}$ (§. 81. 82.) $= a^{\frac{1}{n}} \times d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} \times c^{\frac{1}{n}}$;

seu $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} = c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$; ergo

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ (§. 77. Cor.).

§. 221. *Theorema.* Prout in proportione unus terminus extremus *minor*, *major*, vel *aequalis* fuerit uni medio; alter extremus major, minor, vel aequalis alteri medio erit. Vel quodsi fuerit primus terminus minor secundo; etiam tertius minor quarto sit oportet: Quodsi autem primus major sit secundo; etiam tertius major debet esse quarto termino, et vicissim.

Demonstr. Sit enim $a : b = c : d$, igitur $ad = bc$.

Sit jam $a < b$; erit

$\frac{ad}{a} > \frac{bc}{b}$ (§. 36. N. 3.), vel

$d > c$.

Igitur $c < d$.

Et si $a > b$ fuerit; erit

$\frac{ad}{a} < \frac{bc}{b}$ (§. 36. N. 3.) seu

$d < c$.

Ergo $c > d$.

Si denique $a = b$ ſit; crit

$$\frac{ad}{a} = \frac{bc}{b}$$ (§. 34. Cor. 6.), ſeu

$$d = c.$$

Scholion. Praedictum theorema modum ordinandi terminos regulae aureae accommodatiſſimum dabit.

§. 222. *Theorema.* Si proportionis unius termini per terminos correſpondentes alterius proportionis multiplicentur, aut dividantur, id eſt primus per 1mum, ſecundus per 2dum etc.; facta, vel quoti etiam conſtituent proportionem.

Demonſtratio. Sit $a : b = c : d$, et
$e : f = g : h$; erit

$ad = bc$, et
$eh = fg$ (§. 214.); ergo
$adeh = bcfg$, vel factoribus expoſitis
$ae \times dh = cg \times bf$; ſeu (§. 34. Coroll. 6. Arith.)

$$\frac{ae}{bf} = \frac{cg}{dh}.$$ Igitur

1mo $ae : bf = cg : dh$ (§. 204.).

Tum $$\frac{ad}{eh} = \frac{bc}{fg},$$ ſeu in factoribus

$$\frac{a}{e} \times \frac{d}{h} = \frac{b}{f} \times \frac{c}{g};$$ hinc

2do $$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$$ (§. 215. Cor.) iterum proportio. Quod de duabus demonſtratur, de pluribus probatur eodem modo. Ergo etc.

§. 223. *Theorema.* Quoties duo termini proportionis unius cum duobus terminis proportionis alterius iidem fuerint; semper reliqui quatuor etiam proportionales erunt (ex aequo, vel ex aeqao perturbato, reciproce, vel directe); nisi par medium vel extremum in una aequale esset uni medio et uni extremo termino in altera proportione.

Demonstratio. Quodsi ambo medii vel ambo extremi termini proportionis unius cum utroque extremo vel utroque medio proportionis alterius iidem sint; erit productum reliquorum duorum terminorum unius proportionis aequale producto reliquorum duorum terminorum proportionis alterius. Quare etiam semper hi quatuor diversi termini ad proportionis formam reduci possunt. V. g.

I. Sit $a:b = c:d$ et $m:c = b:n$;

erit $ad = bc$, et $mn = bc$; ergo $ad = mn$, et $a:m = n:d$.

Vel $a:b = c:d$. $m:c = b:n$; vel $b:n = m:c$

erit *b* et *c* antecedens et consequens.

$am:bn = cm:cd$

$a:n = m:d$; ergo quatuor reliqui ex aequo perturbato proportionales.

II. Sit $a:b = c:d$, et $d:m = n:a$;

erit $ad = bc$ $ad = mn$; ergo $bc = mn$; et $b:m = n:c$.

Vel $a:b = c:d$ $d:m = n:a$ ergo $bc = mn$

a et *d* est antecedens et consequens.

et $b:m = n:c$. Quatuor reliqui ex aequo perturbato proportionales.

III. Sit $a:b=c:d$, et $c:m=n:b$;	Vel $a:b=c:d$ $c:m=n:b$	c et b antecedens et consequens.
erit $ad=bc$ $mn=bc$; ergo $ad=mn$; et $a:m=n:d$, etc.	$ac:bm=cn:bd$ et $a:m=n:d$. Quatuor reliqui reciproce proportionales.	

Et quodsi porro unus extremus et unus medius terminus proportionis unius cum uno medio et uno externo alterius iidem sint; in aequationibus hicinde exortis, duo termini unum communem factorem, et duo alteri termini alterum factorem communem continebunt; igitur hae aequationes inter se (invicem) multiplicatae vel divisae tertiam aequationem dabunt, quae solos quatuor hos diversos terminos continet. Quare etiam in hoc casu hi quatuor termini diversi semper constituere possunt proportionem. V. gr.

I. Sit $a:b=c:d$, et $m:a=n:c$;	Vel $a:b=c:d$ $m:a=n:c$	a et c est antecedens et conseq.
erit $ad=bc$, et $mc=an$; hinc $admc=bcan$, seu $dm=bn$; ergo $b:m=d:n$, seu $b:d=m:n$.	$am:ab=cn:cd$ $m:b=n:d$, seu $b:m=d:n$.	

II. Sit $a:b = c:d$, et $m:c = n:a$.

erit $ad = bc$, et $ma = cn$;

ergo $\frac{ad}{ma} = \frac{bc}{cn}$; et $\frac{d}{m} = \frac{b}{n}$; ergo

$d:m = b:n$, seu $b:n = d:m$

Vel $a:b = c:d$, $m:c = n:a$ (a et c antecedens et consequens.)

seu permutando 2dam:

$a:b = c:d$
$n:a = m:c$

$an:ab = cm:cd$, seu $n:b = m:d$, et $b:n = d:m$.

III. Sit $a:b = c:d$, $d:m = c:n$;

erit $ad = bc$, $dn = mc$;

ergo $\frac{ad}{dn} = \frac{bc}{mc}$, et $\frac{a}{n} = \frac{b}{m}$; ergo

$a:n = b:m$.

Vel $a:b = c:d$, $d:m = c:n$ vel $d:c = m:n$ (permutatis mediis in 2da erit c et d anteced. et conseq.)

ergo etiam ita: $a:b = c:d$, $c:d = n:m$; ergo

$a:b = n:m$. seu $a:n = b:m$.

Quodsi denique unum extremum et unum medium par terminorum unius proportionis idem sit cum uno medio et uno extremo termino proportionis alterius; duo communes factores in aequatione, quae ex illa proportione oritur, in eodem membro: in aequatione vero, quae ex hac proportione formatur, unus in uno, et alter in altero termino occurrent; nunquam se igitur tollent. Ideo in hoc casu quatuor illi diversi termini nullo amplius modo in proportionem conferri possunt. V. g.

Sit a:b=c:d
et m:b=n:c;

erit ad=bc, et
mc=bn; ergo

$$c=\frac{ad}{b} \text{ et}$$

$$c=\frac{bn}{m}; \text{ ergo}$$

$$\frac{ad}{b}=\frac{bn}{m} \text{ et}$$

ad:b=bn:m.

Vel a:b=c:d
m:b=n:c

am:bb=cn:dc
am:bb=n:d.

Ergo *a*, *d*, *m* et *n* nunquam proportionem constituere possunt.

Caput VII.

De Proportione geometrica continua.

§. 224. *Proportio geometrica continua* est illa, in qua termini medii sunt iidem. Ut

a:*b*—*b*:c

b dicitur *medius geometrice proportionalis* inter (*a*) et (*c*); c *tertius proportionalis* ad *a* et *b*; et *a tertius proportionalis* ad *c* et *b*.

§. 225. *Theorema.* In proportione continua quadratum termini medii semper aequatur producto extremorum, quivis extremus terminus aequatur quadrato medii diviso per alterum extremum, et medius est aequalis radici quadratae ex producto amborum extremorum.

Demonstratio. Sit enim $a:b = b:c$; erit
$ac = bb$ (§. 214.); ergo etiam

$$a = \frac{bb}{c};$$

$$c = \frac{bb}{a};$$

$$b = \sqrt{ac}.$$

Coroll. 1) Igitur datis duabus harum quantitatum trium, semper et residua inveniri potest.

Sit $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = \frac{1}{4} : x$; erit $\frac{x}{2} = \frac{1}{16}$; et
$$x = \frac{1}{8}.$$
Sit $\frac{3}{4} : x = x : \frac{3}{9}$; erit $x^2 = \frac{9}{36}$; et
$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$
Sit $x : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : 3$; erit $3x = \frac{1}{4}$, et
$$x = \frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}.$$

Coroll. 2) Si quadratum quantitatis aequale sit producto cujuspiam; quantitas illa semper est media proportionalis inter factores hujus producti.

Sit enim $x^2 = pq$; erit
$p:x = x:q$ (§. 215.), seu
$q:x = x:p$.
Item si $x^2 = 24$; erit
$3:x = x:8$; seu
$4:x = x:6$.

§. 226. *Theorema.* In proportione continua habet se terminus primus ad quartum, sicut qua-

dratum primi ad quadratum secundi, vel sicut quadratum tertii ad quadratum quarti.

Demonstratio. Sit $a:b = b:c$; erit

$a:b = q$ $b:c = q$;	hae rationes aequales dant compositam;

$ab:bc = a:c$; ergo ratio $a:c$ est composita ex duabus mediis aequalibus his $a:b$, et $b:c$.

Sed $ab:bc = a^2:b^2$, et

$ab:bc = b^2:c^2$; seu (§. 211.)

$a:c = a^2:b^2$

$a:c = b^2:c^2$. Ergo ratio termini primi (a) ad quartum (c) aequalis quadrato cujusvis rationum simplicium.

Coroll. Hinc in proportione continua ratio subduplicata termini primi ad quartum semper aequalis est rationi cuivis simplici, id est: radix quadrata primi ad radicem quadratam ex quarto aequalis rationi simplici primi ad 2dum, 3tii ad quartum.

Sit enim $a:b = b:c$; erit $a:c = a^2:b^2 = b^2:c^2$.

Ergo $\sqrt{a}:\sqrt{c} = a:b = b:c$ (§. 211.).

Caput VIII.

De Usu et Applicatione Proportionum.

§. 227. Vidimus jam, ex quavis proportione aequationem enasci, cum productum extremorum *aequale* sit producto mediorum, et ex quavis aequatione proportionem, quae *octuplo modo* ex-

primi et repraesentari potest. Quae quantaque sit utilitas aequationum notum habemus. Verum commodum proportionis multo adhuc est majus, ejusque usus ingens. Nam non semper aequalitas inter quantitates ex conditionibus problematis immediate dignosci potest, sed plerumque duntaxat mediate quaerenda, nempe per proportiones. Finis Algebrae, ac omnis Arithmetices desiderat, ut ex cognitis incognitae quantitates inveniantur, id est, ut aequalitas inter cognitas et incognitam magnitudinem detegatur. Ad hunc finem obtinendum comparamus itaque cognitas quantitates cum incognita, et per hanc comparationem demum mediate illuc devenimus Comparatio duarum quantitatum dabit rationem; tunc comparatio duarum rationum dabit proportionem, proportio postea dabit aequationem, ex qua denique incognita quantitas invenitur.

At, quas quantitates licet inter se comparare? Vel, quae qualesque quantitates stant invicem in ratione? Quae, et quales rationes dant proportionem?

Comparantur inter se vel duae quantitates, vel duae rationes, ut inveniatur vel ratio duarum, vel proportio quatuor magnitudinum. Comparatio duarum quantitatum autem sive ratio earumdem, cum nihil aliud sit, quam quotus illarum, tantum in quantitatibus homogeneis institui potest (§. 204, Cor. 3.); quantitates enim heterogeneae sunt disparatae, et una per alteram dividi nequit, nisi haec tanquam numerus spectetur (§. 34. Cor. 7, Arith.). Ergo solas quantitates homogeneas sibi comparare licet, dum non solum quantitas, sed

etiam qualitas quoti ſpectatur. Quare quantitates homogeneae rationem veram conſtituunt.

In comparatione duarum rationum non tam ſpectanda venit qualitas quoti, quam potius quantitas ejusdem. Eſt enim proportio aequalitas duarum rationum. Duae rationes autem ſunt aequalès, quae aequalem quotum (quoad quantitatem, vel numerum unitatum) habent; ergo omnes rationes conſtituunt proportionem, quae aequalem quotum, vel eundem habent exponentem. Poſſunt itaque duae rationes ſibi tamen aequari, licet quoti non ſint ejusdem qualitatis, vel diſſimiles. Ita 100 floreni: 36000 florenos = 100 librae: 36000 libras. Vel 1 ℔ : 2 ℔ = 5 flor. : 10 fl. Vel 1 ℔ : 4 fl. = 2 ℔ : 20 fl.; erunt verae proportiones, quia $\frac{100}{36000} = \frac{100}{36000}$, et $2 \times 5 = 10 \times 1$; licet 10 ℔ nunquam 10 florenis aequentur

Verum in determinando facto, et quoto, vel in inveſtiganda qualitate quanti bene advertendum eſt ad ea, quae de multiplicando et dividendo dicta erant (§. 28. et 34. Arith. Elem.), qui ſemper qualitatem facti et quoti determinant, cum inter ſe ſemper homogenei eſſe debeant. Hinc nihilominus tamen, ſpectata qualitate multiplicandi, erit in propotione 1 ℔ : 2 ℔ = 5 fl. : 10 fl.: factum extremorum 1 ℔ × 10 fl. = 2 ℔ × 5 fl. id eſt 10 ℔ = 10 ℔, vel
10 fl. = 10 fl. prout nempe multiplicandus fuerit, vel ℔ id eſt librae, vel floreni.

Quantitates vero, quas inter ſe comparamus, ut earum ratio, id eſt quantitas quoti inveniatur, pervariae eſſe, et nequaquam omnes induci poſſunt. Res ejusdem nominis, librae, et librae, ſemiunciae

et semiunciae, homines et homines, vires et vires, merces et merces, floreni et floreni, cruciferi et cruciferi, pondera et pondera, pretia et pretia, celeritates et celeritates, massa et massa, spatia et spatia, tempora et tempora, et pluria alia, sunt quantitates homogeneae.

Ex rationibus simplicibus compositam fieri et posse et debere, probatum erat. Hoc pacto diversae res in unam rationem reducuntur, quae singulae sub hac non videntur esse. Omnes scientiae (doctrinae), quae Algebra utuntur, hac in re testantur. Ita in *Statica* affirmatur: quanto major celeritas, et quo longius tempus, tanto majus spatium, et vice versa. Tum quo densius et magis voluminosum corpus fuerit, eo gravius erit, et id genus plura,

§. 228. *Coroll.* 1) Cum itaque quantitates homogeneas duntaxat comparare, et in rationem conjungere liceat; non erit difficile in applicatione (vel praxi) rationem exprimire. Et cum primum duae adsunt rationes; tum inquiritur earum aequalitas, quae in quoto perfacile invenienda est. Haec aequalitas autem duarum rationum dat proportionem, et ex hac potest terminus quivis inveniri.

§. 229. *Coroll.* 2) Quodsi in problemate quopiam plures obveniant rationes, quam duae: hoc indicio erit: rationes has in unam componi posse et debere, ubi quantitates cum producto ex aliis in ratione stent.

Inter plures rationes unius ejusdemque problematis duae duntaxat sunt rationes principales,

in quibus aequalitas verſatur. Haec tunc primum reſtituitur, ſi rationes ſimplices in compoſitam rationem reductae fuerint. Indagatio et determinatio, quae hae duae rationes principales ſint, et quae tantum reſpectum unius earum habeant, intellectum poſtulat. Iudicium (facultas dijudicandi) ſanum plus itaque praeſtabit, quam multis regulis praeſtari poteſt. Ad intelligendam (perſpiciendam) rationem compoſitam praeterea ſaepe variae praeſcientiae (notiones) requiruntur; verum tunc regulae Algebrae tantum applicantur, neutiquam autem novae eduntur. Ita Algebraiſta valde erraret, ſi in motu uniformi accelerato ſupputaturus foret: ſpatia eſſe, ut tempora. Nam ibi demonſtratur: ſpatia eſſe, ut quadrata temporum etc. Quo itaque aequalitatem inter duas vel plures rationes intelligas, et rite exprimas, facultates neceſſarias, ergo Theoriam et Praxim conſocies, igitur praeter regulas Algebrae etiam has ſcientiae illius, quam problema datum ſpectat, teneas neceſſe eſt. Algebram ergo in ſe non tam difficile eſt ediſcere, quam potius ejus uſus et applicatio valde extenſa ſunt.

§. 230. *Ratio aequalitatis* eſt, dum antecedens et conſequens aequales ſeu eaedem quantitates ſunt, ut $a : a$ vel $5 : 5$. Ratio *dupla* eſt, dum antecedens bis continet conſequentem, ſeu dum quotus vel exponens eſt 2, ut $6 : 3$, et $16 : 8$. *Tripla*, dum ter, ut $6 : 2$. *Quadrupla*, dum quater. ut $20 : 5$ etc. Ratio *ſubdupla*, *ſubtripla* etc. eſt, dum antecedens bis, ter etc. continetur in ſuo conſequente, ut $3 : 6$, et $4 : 20$ etc. *Seſqui altera* dicitur, dum antecedens ſemel plus dimidia parte

continet consequentem, ut $6:4$. *Sesqui tertia*, si quotus est $1\frac{1}{3}$; *sesqui quinta*, si quotus est $1\frac{1}{5}$ etc.

Ratio duplicata nihil aliud est, quam ex duabus aequalibus composita, vel cujus exponens quadratum exponentis rationis simplicis est. V. gr.

Sint $2:4$, et
$3:6$, rationes simplices, (2) earum exponens;

erit $6:24$, ratio duplicata, et $4 = 2 \times 2$, ejus exponens; ergo quadratum prioris.

Ratio duplicata aequalis est quadrato cujusvis simplicium. Est enim composita ex aequalibus duabus rationibus, ergo aequatur quadrato cujusvis simplicium (§. 211.). Ergo erit $2^2 : 4^2 = 3^2 : 6^2$; et $6:24 = 4:16 = 9:36 = 4$.

Ratio triplicata est composita ex tribus aequalibus, et ejus exponens est cubus exponentis simplicis. V. g. sint simplices $2:4$, et
$3:6$
$4:8$; erit

composita vel triplicata $24:192 = 8 = 2^3$; ergo $=$ cubo prioris,

Ratio triplicata semper etiam est aequalis cubo rationis cujusvis simplicium (§. 211.). Vel $24:192 = 2^3:4^3 = 3^3:6^3 = 4^3:8^3$.

Ratio subduplicata est, radix quadrata ex antecedente ad radicem quadratam ex consequente rationis duplicatae, et semper aequalis cuivis simplicium. Ut $\sqrt{6}:\sqrt{24} = \sqrt{4}:\sqrt{16} = \sqrt{9}:\sqrt{36} = 2:4 = 3:6$ (§. 211.).

Ratio ſubtriplicata eſt radix cubica ex antecedente ad radicem cubicam ex conſequente rationis triplicatae, ſemperque aequalis cuivis ſimplicium. Ut $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{2^3} : \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{3^3} : \sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{4^3} : \sqrt[3]{8^3} = 2 : 4 = 3 : 6 = 4 : 8$ (§. 211.).

§. 231. Si in ratione geometrica duarum quantitatum exponens eſt numerus integer, vel fractio accurate determinandi numeratoris et denominatoris; tum dicitur *ratio rationalis*, quantitates ipſae dicuntur *rationales*, vel *commenſurabiles*, et exponens dicitur *numerus rationalis*. Si e contrario exponens neque integer numerus, neque fractio determinati numeratoris et denominatoris eſt; tunc dicitur ille numerus *irrationalis*, ratio, *ratio irrationalis*, et quantitates dicuntur *irrationales*, vel *incommenſurabiles*.

Coroll. 1) Ergo omnes radices potentiarum imperfectarum ſunt numeri irrationales, et ſi itaque ejusmodi radix exponens rationis cujuspiam ſit; haec erit ratio irrationalis, et quantitates, quae in tali ratione ſtant, erunt quantitates irrationales, E. g.: ſi $a = b\sqrt{2}$; erit ratio $a : b$ irrationalis, et a, b erunt quantitates irrationales.

Coroll. 2) De duabus quantitatibus irrationalibus ergo nulla alteram exacte metitur (§. 204. Coroll. 4.), et ideo hoc ipſo incommenſurabiles audiunt.

Coroll. 3) Rationes inter numeros irrationales poſſunt rationales eſſe; ut $2\sqrt{3} : 7\sqrt{3} = 2 : 7$.

Omnes rationes rationales autem poſſunt per numeros integros exprimi; $\sqrt[2]{36} : \sqrt[2]{4} = 6 : 2$. Irrationales rationes propemodum per rationales exprimi poſſunt per approximationem.

§. 232. Rationes aequales jam, inter ſe invicem comparando, vel *directae*, vel *inverſae*, id eſt, reciprocae ſunt. Rationes dicuntur *directae*, quarum antecedentes majores, vel minores ſunt conſequentibus, ut $a:aq = b:bq$, vel $aq:a = bq:b$; hoc eſt, ſi in prima ratione ita ſit primus ad 2dum, ut in altera itidem primus ad 2dum.

Rationes dicuntur *inverſae*, vel *reciprocae*, ſi antecedens primae ſit major ſuo conſequente, et antecedens ſecundae minor ſuo conſequente; vel primus minor, et ſecundus major; hoc eſt, ſi ſit 1mus ad 2dum in prima, ut 2dus ad 1mum in altera. Ut 3:15 eſt reciproce ut 10:2.

Facile colligitur, ſolas rationes directas conſtituere proportionem veram: hanc ergo diviſionem rationum tantum propter faciliorem inventionem ordinis terminorum proportionis cujuspiam, et propter eorum denominationem a mathetis factam eſſe, Ita ſi fuerit $\frac{a}{q} : \frac{b}{q} = n$; erit

$n = aq : bq = a : b$; igitur

$\frac{a}{q} : \frac{b}{q} = a : b$. Unde affirmatur: fractiones ejusdem denominatoris ſunt in ratione directa cum ſuis numeratoribus, vel habent ſe directe, ut numeratores ſui.

Et quia $\frac{a}{p} : \frac{a}{q} = aq : ap = q : p$; hinc dicitur: fractiones habentes aequales numeratores ſtant in ratione inverſa cum ſuis denominatoribus, vel habent ſe reciproce, ut denominatores ſui.

Porro quia $\frac{a}{n} : \frac{b}{r} = ar : bn$; hinc affirmatur: duo quoti homogenei ſunt in ratione compoſita directa numeratorum, et inverſa denominatorum. Denique quia ex aequatione: $\frac{a}{n} = \frac{b}{r}$, ſequens proportio fit, $a:b = n:r$; hinc affirmatur, ſi duo quoti quantitatum homogenearum aequales ſint; eſſe dividendos in directa ratione cum diviſoribus etc.

§. 233. *Theorema.* Quatuor quantitates numeratae ſunt in proportione geometrica, ſi numeri illis praefixi proportionem conſtituant, id eſt, ſi $m:n = r:x$; erit $ma:na = rb:xb$, V. gr. ſi fuerit $4:7 = 12:x$; erit etiam 4 ſemiunciae : 7 ſemiunc. = 12 floreni : x florenos; vel 4 orgiae : 7 orgias = 12 flor. : x flor.

Demonſtratio, $m:n = ma:na$ (§. 205.), et
$m:n = r:x$ (per hypoth.); ergo
$ma:na = r:x$ (§. 204. Cor. 6.); ſed eſt
etiam $rb:xb = r:x$ (§. 205.); igitur
$ma:na = rb:xb$. (§. 204. Coroll. 6.).

§. 234. *Problema.* Ad tres quantitates numeratas *ma*, *na*, et *rb*, quartam geometrice proportionalem quantitatem *xb* invenire.

Resolutio. Quaeratur ad tres numeros datos m, n, r quartus proportionalis $x = \frac{nr}{m}$ (§. 214. Cor. 2.); erit quantitas quaesita $xb = \frac{nr}{m} \times b$.

Ex. gr.

Si sit 4 semiunc. : 7 semiunc. = 12 flor. : x fl.; erit, x floren. $= \frac{7 \times 12}{4}$ florenis $= 7 \times 3$ fl. $= 21$ flor.

Demonstratio. Nam cum hic $m:n = r:x$ (juxta regulam): erit et $ma:na = rb:xb$ (§. 233.).

§. 235. *Problema.* Inter duas homogeneas quantitates numeratas na et ra invenire mediam geometrice proportionalem quantitatem xa.

Resolutio. Quaeratur inter numeros n et r medius numerus proportionalis $x = \sqrt{nr}$ (§. 225. Coroll. 1.); est $xa = a\sqrt{nr}$, E. g.: si sit invenienda inter duas lineas 4 digitor., et 16 digitorum, media geometrice proportionalis linea: erit haec $= \sqrt{64}$ digitis $= 8$ digitis.

Demonstratio. Nam cum $n:x = x:r$ (secundum regulam); hinc est $na:xa = xa:ra$ (§. 238.); ergo xa media geometrice proportionalis quantitas inter na et ra (§. 224.).

Scholion. Potest ergo calculus in ejusmodi quantitatibus peragi, quin vel minime respectus habeatur quantitatum ipsarum, dum ut patet in solis numeris calculare licet.

§. 236. Si duae quantitates *A.* et *B* talem refpectum ad invicem habeant, ut quaevis pars unius certam partem alterius efficiat; pars data dicitur pars *correfpondens* partis datae. Quodfi in una quantitate prima pars a ad fecundam α fit, ut prima correfpondens b ad fecundam β; tum affirmatur: *partes* a, α quantitatis primae funt *partibus correfpondentibus* b, β quantitatis alterius *proportionales directe.* Quodfi contra pars prima a fit ad fecundam α, ut fecunda correfpondens β ad primam b; tum dicitur: partes primae funt partibus correfpondentibus alterius *inverfe proportionales.*

§. 237. Si duae quantitates *A*, *B* talem refprectum ad invicem habeant, ut non folum quaevis pars quantitatis unius certam partem alterius, verum etiam pars (n) vicibus major unius, femper partem (n) vicibus majorem alterius efficiat; quaevis duae partes unius partibus correfpondentibus alterius *directe proportionales funt,* id eft, fi a partem b, et α partem β efficiat; erit $a:\alpha = b:\beta$. Quodfi autem pars (n) vicibus major unius (n) vicibus minorem alterius efficiat; quaevis duae partes unius partibus correfpondentibus alterius inverfe proportionales funt, id eft in hoc cafu erit $a:\alpha = \beta:b$, ratio $a:\alpha$ caeterum five rationalis five irrationalis fit.

Demonftratio. Nam cum exponens numerus fit (§. 204.) femper hic, five fit rationalis five irrationalis, per fractionem exprimi poteft. Sit ergo in ratione $a:\alpha$, exponens $= \frac{r}{n}$; erit jam

$a = \frac{r}{n}\alpha$ (§. 204. Cor. 1.). Dum igitur *a* partem *b* dat; dabit etiam $\frac{r}{n}\alpha$ partem *b* (§. 4. Cor. 1.). Quodsi ergo 1) pars (n) vicibus major unius quantitatis etiam semper (n) vicibus majorem alterius det; dabit (n) vicibus $\frac{r}{n}\alpha$, etiam (n) vicibus *b*, id est $r\alpha$ dabit nb (§. 33.); ergo dabit α partem $\frac{nb}{r}$. Atqui α dat partem β (per hyp.), igitur erit $\frac{nb}{r} = \beta$ (§. 4. Cor. 1.), ergo $b = \frac{r\beta}{n}$ (§. 34. Cor. 2.); igitur erit in ratione $b : \beta$ exponens pariter $= \frac{r}{n}$ (§. 204.). Ergo $a : \alpha = b : \beta$.

2) Quodsi vero pars (n) vicibus major unius quantitatis (n) vicibus minorem alterius det; dabit (n) vicibus $\frac{r\alpha}{n}$ partem $\frac{1}{n}$ b (§. 33.), id est $r\alpha$ dabit $\frac{1}{n}$ b (§. 33.), ergo α dabit partem $\frac{rb}{n}$. Atqui α dat partem β (per hyp.), igitur $\beta = \frac{rb}{n}$ (§. 4. Corollar. 1. Arithm.), igitur in ratione β : b exponens pariter $= \frac{r}{n}$ (§. 204.), ergo $a : \alpha = \beta : b$.

Scholion. Hoc Theorema continet criterium generale proportionabilitatis, ex quo in omni casu modo facillimo determinari potest, an duae quantitates aliis duabns geometrice proportionales, et utrum ad invicem sint directe vel reciproce proportionales, earum rationes sive rationales sive irrationales sint, cum solummodo investigari debeat, an pars (n) vicibus major unius etiam semper (n) vicibus majorem, vel (n) vicibus minorem partem alterius det et efficiat. E. g. Si quis (n) vicibus celerius laboret, ille caeteris paribus (n) vicibus plus efficiet, ergo labores (operae) sunt celeritatibus directe proportionales; sed quis (n) vicibus citius laborat, is ad idem opus (n) vicibus minori tempore opus habet; ergo hic tempora celeritatibus reciproce sunt proportionalia. E contrario corpus quodpiam tempore (n) vicibus majori nec per (n) vicibus majus spatium, necque per (n) vicibus minus cadit, igitur spatia, quibus corpus quodpiam libere cadit, temporibus minime geometrice proportionalia sunt.

Caput IX.

Applicatio doctrinae de proportionibus ad resolvenda problemata varia in vita communi occurrentia.

A. *In Regula aurea.*

§. 238. *Regula aurea* est methodus, ad tres terminos datos quartum terminum inveniendi, seu

ad datum antecedentem inveniendi consequentem talem, ut ratio haec secunda aequalis cum priore, proportionem efficiat.

Est ergo regula aurea nihil aliud, quam vera *regula proportionis*, docetque ex datis rationibus aequalitatem seu proportionem invenire.

Quemadmodum proportio, ita et aurea regula alia est *simplex*, alia *composita*. Illa est investigatio ad datos tres terminos simplices, ex datis duabus rationibus, quarti geometrice proportionalis, quare etiam *regula trium* vel de tribus numeris nuncupatur. Haec est investigatio ad tres terminos ex pluribus datis compositos, ex datis pluribus rationibus quarti geometrice proportionalis, et vocatur *regula quinque*, dum ad quinqne terminos simplices sextus quaeritur ex datis quatuor rationibus; *regula catenata* (Kettenregel), dum ad 7mum, 8vus etc. quaeritur, ex 6 etc. rationibus.

Regula aurea appellatur etiam directa, et inversa. *Directa* erit, si primus terminus fuerit ad secundum, ut 3tius ad 4tum; *inversa*, si 1mus ad 2dum, ut reciproce 4tus quaerendus ad 3tium datum. Debitus terminorum ordo semper directam dabit.

Corollarium. Regula trium tantummodo in eo casu applicari potest, si quartus terminus quaerendus ad datos tres geometrice sit proportionalis, cum regula aurea mera proportio sit. An autem quaerendus cum datis tribus sit in proportione, et in quali, id est, qualem ordinem quatuor termini istius proportionis habere debeant, utrumque ex contemplanda natura harum quantitatum, et ex conditionibus problematis dati colligi debet.

In omni regula proportionis prae caeteris investigandae erunt rationes quantitatum. Hae ipsae jam vel in natura (qualitate) quantitatum constitutae, vel per leges et consuetudines determinatae sunt, quas ergo rite nosse opertet, antequam problema quodpiam illas rationes spectans resolvi queat. Relationes has quantitatum in vita communi et humano commercio ediscimus plerumque absque omni singulari praeceptione.

§. 239. Quae- et qualescunque autem hae relationes sint, in quibus binae et binae quantitates, vel termini regulae proportionis stant; duo tantum casus possibiles sunt: duae quantitates nempe vel ita invicem in ratione geometrica stant, ut *crescente* aut *decrescente una*, simul etiam *altera crescat* aut *decrescat*, vel etiam ita in ratione ad invicem stare possunt, ut *decrescente una*, *altera crescat*, aut *crescente una*, *altera decrescat*. In primo casu quantitates erunt in ratione *directa*, in altero in ratione *inversa*. Ratio ergo directa semper locum habet, quoties dici potest: quanto plus unius, tanto plus alterius, vel quo minus unius, eo minus alterius. Ratio contra inversa habet locum, ubi affirmari potest: quanto minus unius, tanto plus alterius; vel quanto plus unius, tanto minus alterius.

Investigata jam natura quantitatum, et determinata ratione earumdem binarum et binarum, investiganda erit aequalitas duarum rationum, ut proportio inter quatuor terminos, et ex hac quartus illis tribus datis proportionalis inveniatur. Omnis proportio potest octuplo modo exprimi et reprae-

sentari; posset igitur inter terminos regulae aureae etiam octupla collocatio instare, semperque ex terminis cognitis incognitus inveniretur.

Interea natura rei ipsa ad sequentem methodum inveniendi ordinem terminorum regulae proportionis seu trium conformem et jam probatis propositionibus et sensui communi deducet.

§. 240. Aequalitas inter duas rationes in eo consistit, ut termini rationis unius aut crescant aut decrescant ita, quemadmodum termini rationis alterius crescunt aut decrescunt: ut alteri ita crescant, sicut alteri decrescunt, vel ut alteri sic decrescant, sicut alteri crescunt. In regula trium ergo proprie sic dicta sive directa sive inversa, quatuor terminorum, inquirantur duae rationes instantes, et prout unum alterumve ex praedictis, inventum fuerit; ponatur aequalitas earumdem. *Exempla* rem reddent clariorem.

Detur *Problema* hoc: 6 ulnae stant 18 fl., quanti stant 20 ulnae?

Positis ulnis cum ulnis (invicem) et florenis cum florenis in rationem (cum tantum homogenea sibi comparari possint), quaeratur aequalitas harum duarum rationum. Quemadmodum ulnae crescunt, ita crescunt rhenenses, ergo ut se habent 6 ulnae ad 20 ulnas, ita se habebunt 18 floreni ad quaesitos. Ratio igitur 6 : 20 ulnarum debet aequalis esse rationi 18 : x flor. vel $6 : 20 = 18 : x$. Hinc

$$x = \frac{20 \times 18}{6} = 60 \text{ flor.}$$

Problema. 1) 20 ulnae ſtant 60 flor., quanti ſtat 1 ulna? Reſponſ. x florenis.

Quemadmodum ulnae decreſcunt, ita floreni minuuntur; ergo 20 : 1 uln. ſicut 60 : x fl.; vel 20 : 1 = 60 : x, et $x = \frac{60}{20} = 3$ florenis.

Problema. 2) 5 meſſores metunt aliquem agrum intra 2 dies, quamdiu laborabunt 8 meſſores in agro hoc? Reſp. x diebus.

Quo plures meſſores, eo brevius tempus laboris, uti ergo termini rationis prioris 5 : 8 meſſorum creſcunt, ita termini rationis alterius decreſcunt, hinc 5 : 8 = x : 2, vel 8 : 5 = 2 : x;

$$x = \frac{5 \times 2}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4} \text{ diei.}$$

Problema. 3) 100 homines 4 hebdomadis ſufficientia habent alimenta; quamdiu ſufficient haec 40 viris? Reſp. x hebdomadibus.

Quemadmodum virorum numerus minuitur, ita alimenta creſcunt, vel pauciores homines iisdem alimentis longiori tempore vivent; ſicut ergo termini rationis 100 : 40 vir. decreſcunt, ita termini alterius decreſcunt; ergo 100 : 40 = x : 4; ſeu 40 : 100 = 4 : x, et $x = \frac{400}{40} = 10$ hebdomadis.

Problema. 4) Quot operariis opus habeo, ut 1 die opus quoddam conficiant, ſi 8 operarii in illo 3 diebus occupantur? Reſponſ. x operariis.

Quo plur. diebus laboratur, eo minus operarii requiruntur, et quo minus diebus, eo plures operarii; quemadmodum ergo operarii minuun-

tur, ita dierum numerus crefcit; hinc ratio x:8 operator. aequalis rationi 5:1 dierum. Ergo x:8 = 5:1, feu 5:1 = x:8, feu

$$1:5 = 8:x; \text{ et } x = \frac{5\times 8}{1} = 40 \text{ oper.}$$

Detur denique *Problema* 5): Quot ulnas mercabor 20 fl. fi 3 fl. pro 1 ulna folvo? Refp. x ulnas.

Ex praedictis facile jam intelligitur, diverfo modo aequalitatem duarum rationum obtineri poffe. Nam in problemate dato erit: ut floreni decrefcunt, ita ulnae decrefcunt, et vice verfa, ergo 20:3 = x:1 (flor. uln.), vel x:1 = 20:3. Tum ut ulnae crefcunt, ita crefcunt floreni, ergo 1:x = 3:20, et vice verfa 3:20 = 1:x; igitur $x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ uln.

§. 241. Ergo res non in eo pendet, quem locum in proportione incognita (quaefita x) occupet, cum tamen proportio vera effe, atque femper incognita inveniri poffit.

Quodfi vero in aequalitate duarum rationum, vel ordine terminorum regulae aureae, inveftigandis, multo breviore modo tractare, et non tam facile errare velis; fequere *methodum regulae aureae* fimplicis hanc:

1) Quantitatem incognitam x (terminum quaeftionis) in loco quarto (in formam proportionis) colloca; quantitatem (vel terminum), cum incognita homogeneam pone tertio loco.

2) Tum inveftiga rationem inter has duas quantitates, quaerendo, an *plus* vel *minus* ad datam

quaeſtionem pro reſponſione prodeat, id eſt, an inveſtigandus terminus quartus *major* vel minor ſit futurus tertio.

3) Si (poſita hac quaeſtione) *quartus* numerus *major* eſt futurus tertio illi homogeneo; ratio prima creſcere, igitur etiam antecedens primae rationis *minor* ſuo conſequente poni debet; ſi vero *minor;* ratio prior decreſcere debet, igitur etiam antecedens primae rationis major ſuo conſequente ſit oportet. Semper autem quantitates homogeneae in rationem collocandae, id eſt, homogenea ad homogenea ponenda ſunt. V. g. Sit Exemplum ſequens;

6 ulnae conſtant 20 fl.; quanti ſtat 1 ulna? x flor. Poſito x fl. in loco quarto, et 20 fl. loco tertio, erit 20 : x fl. una ratio. Quaeſtio: an quantitas x fl. major vel minor ſit futura, quam 20 fl. habet reſponſum: x erit minor 20 flor., quia 1 ulna minoris conſtat, quam 6 ulnae, ut ulnae decreſcunt, ita decreſcunt floreni; hinc cum $x < 20$, in ratione prima ponenda, debet antecedens major ſuo conſequente eſſe; ergo erit 6 : 1 ratio ſecunda, aequalis primae inventae. Quare $6 : 1 = 20 : x$, et $x = \frac{20}{6}$, ut prius.

Sit Exemplum: 8 operarii conficiunt opus quodpiam 5 diebus; quot diebus operaturi 12 operarii in eodem opere? x diebus.

Poſitis homogeneis quantitatibus in rationem,
dies
erit: 5 : x prima ratio; verum cum in hac ratione $5 > x$, vel $x < 5$ fiat: hinc erit in altera ratione antecedens major ſuo conſequente, ergo
Oper.
12 : 8; creſcente enim numero operariorum,

dies laboris decrescunt; estque $12:8 = 5:x$; et $x = \frac{40}{12} = 3\frac{1}{3}$ diebus.

Sit Exemplum: 100 floreni dant per annum censum 4 florenorum; quantus est numerus florenorum (Capitale), si census sit 600 fl. per annum? x flor.

Posita incognita x in loco quarto, et illi homogenea quantitate: 100 fl. tertio loco, erit (: = 100 : x fl.); et cum $100 < x$ sit; hinc in prima ratione antecedens minor suo consequente sit oportet; estque 4 (Cens.) : 600 (Capit.) = 100 : x; et

$$x = \frac{600 \times 100}{4} = 15000 \text{ fl. Cap.}$$

Semper itaque quantitates homogeneae juxta se locantur, incognita x loco quarto (ut quartus terminus), homogenea cum x loco tertio (tertius terminus). Tum quaeritur, an x major vel minor sit futura quantitate illi homogenea? Dum x major est tertio termino: proportio crescere, igitur terminus primus minor secundo; et dum x major est tertio termino: proportio decrescere, igitur terminus primus major secundo esse atque statui debet.

Hanc methodum inveniendi rectum ordinem terminorum proportionis veram atque simplicissimam esse comprobant praecedentes §phi, praecaeteris §. 221. Et quod etiam sit commodissima et tyronibus facillima, illi ipsi fatentur.

§. 242. *Coroll.* 1) Regula aurea simplex, dum ex tribus datis quantitatibus, quarta incognita quaeritur, omni igitur difficultate caret, semper-

que juxta methodum commemoratam quantitas incognita aequalis est, producto terminorum mediorum diviso per terminum primum vel *regulae aureae* ipsiusmet haec sunt verba: *multiplicetur numerus quantitatis tertiae per numerum quantitatis secundae, et productum hoc dividatur per numerum quantitatis primae, quotus dabit numerum quantitatis quartae quaesitae* (§. 233.).

Cum jam praedicta methodo debitus ordo terminorum in omni casu, sive rationes sint directae sive reciprocae, et tum ex recto ordine semper quarta incognita tribus datis proportionalis eodem modo inveniatur; methodus haec juste nomen *regulae*, et quidem propter ingentem usum *aureae* meretur.

§. 243. *Coroll.* 2) Restituto jam ordine terminorum regulae aureae debito, resolutio ipsa admodum facilis reddi poterit; si reliqua commoda proportionum etiam in regula aurea applicentur, nempe: dividendo terminos homologos per eundem numerum, qua ratione termini simpliciores fiunt etc. Caeterum regulae multiplicationis et divisionis tum in numeris integris, cum in fractionibus vel numeris mixtis heterogeneis applicandae erunt. Hinc, si termini fuerint numeri mixti heterogenei (diversae speciei), hi prius, si opus est, ad eandem denominationem vel eandem speciem reducendi erunt, antequam regula trium applicetur. V. g.

Si duae librae et 3 semiunciae mercedis cujuspiam 5 fl. 16 crucif. venduntur, quanti veneunt 7 librae et 4 semiunc. ejusdem? Locatis debite terminis erit, 2 ℔ 3 sem.: 7 ℔ 4 sem.

$= 5$ fl. 16 cruc. : x fl. Et $x = \dfrac{5 \text{ fl. } 16 \text{ cruc.} \times 7 \text{ ℔ } 4 \text{ sem.}}{2 \text{ ℔ } 3 \text{ sem.}}$. Et reductione facta:

$2\frac{3}{32}$ ℔ : $7\frac{4}{32}$ ℔ $= 5\frac{16}{60}$ fl. : x flor.; seu

67 : 228 semiunc. = 316 cruc. : x crucifer.

Vel in fractionibus $2\frac{3}{32}$ ℔ : $7\frac{1}{8}$ ℔ $= 5\frac{4}{15}$ fl. : x fl.; seu $\frac{67}{32}$: $\frac{57}{8}$ ℔ $= \frac{79}{15}$ fl. : x fl.; seu

$67 \times 8 : 57 \times 32 = \frac{79}{15}$ fl. : x fl.; et

$67 \times 8 \times 15 : 57 \times 32 = 79$ fl. : x fl.; ergo etiam

$67 \times 15 : 57 \times 4 \times 79$: x flor.; et $x = \dfrac{57 \cdot 4 \cdot 79}{67 \cdot 15}$ fl.

Exemplum. $\overset{\text{ulnae}}{\frac{3}{4}} : \overset{\text{lòng}}{2} = 3 : x$; erit
$3 : 8 = 3 : x$, seu
$1 : 8 = 1 : x$; $x = 8$.

Exemplum. 12 flor. emuntur 3° 3'; quanti veneunt 14° 4'? x florenis. Erit

3° 3' : 14° 4' = 12 fl. : x flor.; et

$x = \dfrac{14^\circ 4' \times 12 \text{ fl.}}{3^\circ 3'}$.

$x \text{ fl.} = \dfrac{176 \text{ fl.}}{3^\circ 3'} =$

x fl. = 176 fl. : $\frac{7}{2} = \frac{352}{7}$
$= 50\frac{2}{7}$ flor.

12 fl. × per 14° 4' = 14° + $\frac{1}{3}$ + $\frac{1}{3}$;
48
12
4
4
176 flor.

Vel $3\frac{1}{2}°$: $14\frac{2}{3}°$ = 12 : x flor., seu

$\frac{7}{2}°$: $\frac{44}{3}°$ = 12 : x flor; seu

$21 : 88 = 12 : x$ flor., et

$7° : 88° = 4 : x$ flor.; ergo x fl. $= \frac{352}{7} = 50\frac{2}{7}$ flor.

Vel $21' : 88' = 12 : x$ flor.

§. 244. *Coroll.* 3) Cum proportionis terminus quartus cum termino tertio cognito homogeneus sit; regula trium simul ratio erit inveniendi qualitatem producti vel quoti (fractionis) in numeris mixtis heterogeneis: si nempe haec debite in proportionem resolvantur, et termini deficientes restituantur. E. g. Sint multiplicanda 6° 3′ per 9 fl. 50 cruc.. Quaeritur, quale sit futurum productum. Hic vera proportio versatur inter 1, factores, et productum quaesitum. Fiat ergo $1° : 6°\ 3' = 9$ fl. : x flor. Ubi x flor. $= 6°\ 3' \times 9$ flor. 50 crucif.; vel

x flor. = 9 fl. 50 cruc. $\times$ 6° 3′ (more mixtorum heterogeneorum) = 63 flor. 55 cruc.

Et sint multiplicandi 9 fl. 50 cruc. per 6° 3′. Fiat 1 fl. : 9 fl. 50 cruc. = 6° 3′ : x orgias. Ubi

$x° = 6°\ 3' \times 9$ fl. 50 cruc. (more mixtorum) $= 63°\ 5'\ 6''$. Haec producta respectu quantitatis sunt aequalia; est enim: 63 flor. 55 crucif. $= 63\frac{55}{60} = 63\frac{11}{12}$; et $63°\ 5'\ 6'' = 63° + \frac{5}{6}° + \frac{6}{72}° = 63 + \frac{60}{72} + \frac{6}{72} = 63 + \frac{66}{72} = 63\frac{11}{12}$.

§. 245. *Regula aurea composita* illa est, quae plures, quam quatuor terminos continet. Intelligatur tamen, quod parem numerum terminorum habere debeat, ergo 6, 8, 10, et ita porro, cum id quoque rationes compositae requirant, ad quas haec species regulae aureae numeratur. Quodsi nempe fuerit

$a:b = c:x$
$d:e = x:y$; erit (§. 209. et 222.)
$ad:be = c:y$ *formula generalis regulae de quinque numeris.*

Et quodsi fuerit $a:b = c:x$
$d:e = x:y$
$f:g = y:z$; erit (§. 209. 222.)

$adf:beg = c:z$, formula regulae compositae vel catenatae.

§. 246. Cum ratio composita, productum antecedentium ad productum consequentium plurium rationum sit; hinc in hac specie regulae aureae praeprimis rationes singulae inferendae sunt, antequam aequalitas earum investigatur.

Primum perpenditur ratio ea, in quam incognita quantitas pertinet, tum comparantur huic singulae rationes, ponuntur (locantur), componuntur in rationem compositam, et demum exprimitur aequalitas earumdem.

§. 247. Quodsi praescriptam methodum simplicis regulae trium spectaturi simus; *modus resolvendi compositam* sequens erit:

1) Incognita x ponitur ad quartum locum, illique homogenea quantitas loco tertio.

2) Tum accipiuntur duae quantitates homogeneae quaeriturque inter illas ratio ut in methodo simplicis, id est, prout x major vel minor fuerit; primus terminus rationis (antecedens) minor vel major secundo (consequenti) sit oportet. Hoc modo obtinetur proportio.

3) Porro iterum duae homogeneae quantitates ſumuntur, rurſusque ratio earumdem methodo datà quaeritur, et ita continuatur; quot nempe paria talium quantitatum dantur, tot erunt rationes; ſequentes ſemper infra primam rationem proportionis ſcribuntur.

4) Ex his demum ſimplicibus rationibus conficitur ratio compoſita. Atque haec proprie eſt aequalis rationi ei, de qua incognita quantitas x conſequentem, et illi homogenea antecedentem repraeſentat.

5) Ratio compoſita, quantum fieri poteſt reducitur ad expreſſionem ſimpliciorem, et integra (§. 209.).

Exempla rem declarabunt. Proponatur ſequens

Problema 1) 1000 fl. Capital. dant per 12 menſes cenſum 40 flor.; quantum dant cenſum 50000 fl. Capit. per 7 menſes? x flor. cenſum.

Reſolutio. Quemadmodum numerus flor. augetur, ita creſcit cenſus; verum ſimul quemadmodum menſium numerus minuitur, vel augetur, ita cenſus decreſcunt, vel creſcunt; quo major igitur numerus florenorum, et quo longius tempus vectigale fuerit, eo major cenſus erit, et vice verſa. Cenſus itaque ſunt in ratione compoſita florenorum et temporum vectigalium. *Sive:* incognita x ad locum quartum, et cenſu 40 fl. ad tertium locum poſitis, tum quaeratur 1000 fl. dant cenſum 40 fl., quot dabunt 50000 fl.? Reſp. plus; ergo terminus primus minor ſecundo; hinc erit $1000 : 50000 = 40 : x$ (ſi tempora ſint eadem). Porro: pro 12 menſibus obveniunt

40 fl. census, quot obvenient pro 7 mensibus? Resp. minus; terminus primus igitur debet ma-
mens.
jor esse secundo; hinc erit $12:7 = x:y$ (si florenorum aequalis numerus). Verum censum vel usoram 40 fl. accipio, dum 1000 fl. per 12 menses usuris pendo, ergo accipiam usuram y flor., si 50000 fl., ad 7 menses usuris darem, id est: $40:y$ est ratio composita usurarum; tunc tantum accipio 40 fl. usuram, si 1000 fl. 12 sumo, vel si 1000 fl. per 12 menses usuris do, et y florenorum usuram, si 50000 fl. septies sumo (vel per 7 menses usuris do). Quemadmodum ergo ratio $40:y$ (usurarum) ratio est composita, ita etiam obtinendae aequalitatis caussa ex $1000:50000$, et ex $12:7$ formanda est ratio composita; hinc erit ex

$$1000:50000 = 40:x, \text{ et}$$
$$12:7 = x:y$$

$$12000:350000 = 40:y, \text{ seu}$$
$$12:350 = 40:y; \text{ ergo}$$
$$y = \frac{350 \times 40}{12} = 1166\tfrac{2}{3} \text{ flor.}$$

In Operatione ipsa termini ita locantur:

$$1000:50000 = 40:x$$
$$12:7$$

$$12:350 = 40:x.$$

Detur *Problema* hoc: 2) Sit murus 10' longus
6' latus
2' profundus,
hunc exstruit 1 caementarius; desideratur murus exstruendus hoc ipso tempore, qui sit

12' longus
8' latus
12' profundus.

Quot caementarii requiruntur? Incognita x ad locum quartum, et 1 ad tertium positis, erit:
: = 1 : x; tum fiat

Longitud. 18' : 12 = 1 : x	cum pauciores murarii requirantur, dum murus 12' longus est, quam dum 18' longus est, ergo 18:12.
Latitud. 6' : 8' =	Porro, dum murus 8' est latus plures operarii requiruntur, quam dum est 6' latus; ergo 6' : 8'.
Profundit. 2' : 14' =	Deinde, si murus 14' profundus est, plures caementarii requiruntur, quam si sit 2' profund.; ergo 2' : 14'.

At ratio (1 : x) caementariorum, est composita, copia enim operariorum sequitur (est in ratione) longitudinem, latitudinem et profunditatem muri; hinc ex rationibus

18 : 12 vel 6 : 4 sive 3 : 2
6 : 8 — 3 : 4 — 3 : 4
2 : 14 — 1 : 7 — 1 : 7

composita ratio 9 : 56 fieri debet; haecque ratio 9 : 56 aequalis est huic 1 : x, vel
9 : 56 = 1 : x, et
$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ caement.

Scholion. x, considerantur ut vires. Ad haec, omne solidum consideratur, ut extensio in longum, latum et profundum; quo longius, latius,

et profundius corpus (murus) est, eo plures requiruntur caementarii ad illud exstruendum, assumpto eodem tempore. Quodsi autem tempus fuerit diversum? In sequenti

Problemate. 3) In muro exstruendo, qui
10 pedes altus
4 pedes latus et
940 orgias longus est, laborant
100 caementarii per 3 menses;
quovis mense per 21 dies,
quovis die per 8 horas;
quot caementarii requiruntur ad construendum murum, qui 12 pedes altus
14 pedes latus et,
4286 orgias longus sit, et caementarii
per 6 menses; quovis mense
per 24 dies; et quovis die
9 horis laboraturi forent?

Resolutio. Requiruntur x caementarii; ergo x ad quartum locum, et 100 ad tertium. Modo quaeritur: si murus 940 orgias est longus, requiruntur 100 caementarii, quot si sit murus 4286 orgias longus. Plus; ergo $100 < x$; hinc 940 ad primum et 4286 ad secundum locum ponendum; porro, si murus 10 pedes est altus, requiruntur 100 caementarii, quot si 12 pedes altus sit? Plures; hinc 10 ad primum et 12 ad secundum locum; postea si murus est 4 pedes latus requiruntur 100 caementarii, quot eorum, si murus sit 14 pedes latus? Plures; ergo 4 ad primum et 14 ad secundum locum. Erit ergo calculatio tempore non spectato haec:

$$940 : 4286 = 100 : x$$
$$10 : 12$$
$$4 : 14$$

Verum numerus caementariorum non ſolum ſecundum longitudinem, latitudinem, et altitudinem muri augetur, ſed etiam rationem habet ad durationem temporis. Quare ulterius quaeritur: ſi 100 caementarii laborant, opus habent 3 menſibus; ſi per 6 menſes laboratur, quot caementarii requiruntur? Minus; cum ergo 100 > x ſit, primus terminus major ſecundo ſit oportet, vel 6 : 3 menſ. = 100 : x. Tum, ſi 24 diebus laboratur, pauciores operarii requiruntur, quam ſi 21 diebus laboretur, ergo $100 > x$ et ideo 24 : 21; denique ſi 9 horis laboratur, pauciores operarii requiruntur, quam ſi 8 horis laboretur, hinc quia $100 > x$, erit 9 : 8 ponendum. Nunc jam tota calculatio haec eſt:

$$940 : 4286 = 100 : x$$
$$10 : 12$$
$$4 : 14$$
$$6 : 3$$
$$24 : 21$$
$$9 : 8.$$

Sed (100 : x) eſt ratio compoſita, et igitur rationi compoſitae ex ſimplicibus rationibus primum aequalis; nam numerus operariorum ſtat in ratione altitudinis, latitudinis et longitudinis muri, ſimulque temporis, quo laborant. Hae rationes autem

940 : 4286	abbreviatae	470, 940 : 4286, 2143
10 : 12		10 : 12, 2
4 : 14		2, 4 : 14, 7
6 : 3		6 : 3
24 : 21		3, 24 : 21, 7
9 : 8		3, 9 : 8.

dant has:

470 : 2143
10 : 7
3 : 7; compoſitaque eſt

$(470 \times 10 \times 3) : 2143 \times 7 \times 7 = 14100 : 105007.$

Ergo $14100 : 105007 = 100 : x$, et
$x = \frac{105007}{141} = 744\frac{103}{141}$.

Scholion. Requiruntur ergo 744 vel potius 745 caementarii. Poſſet operatio etiam hoc modo exhiberi. Longitudo, latitudo, et altitudo conſtituunt corpus, ac menſes, dies, et horae tempus laboris. Quo major ſoliditas corporis (muri), et quo brevius tempus eſt, eo plures operarii requiruntur, id eſt, vires (operarii) ſunt in ratione compoſita directe ut longitudo, latitudo, et altitudo, et reciproce ut tempora. In conſequentiam hujus rationes ipſae inveniendae forent: Si murus (940° longus, 10' altus et 4 pedes latus) eſt, requiruntur 100 operarii; quot requiruntur, ſi murus (4286° longus, 12' altus, et 14' latus) ſit? Reſponſio eſt: plures; hinc $x > 100$; et ergo proportio $(940° \times 10' \times 4') : (4286° \times 12' \times 14') = 100 : x$. Porro, dum laboratur per (3 menſes, quovis menſe per 21 dies, quovis die per 8 horas), requiruntur 100 operarii; quot requiruntur, ſi per (6 menſes, quovis per 24 dies, et quovis die per 9 horas)

laboretur? Resp. pauciores. Hinc $100 < x$, et proportio erit (6 menses $\times$ 24 dies $\times$ 9 hor.): 3 M. $\times$ 21 d. 8 hor.) = 100 : quartum. Debet igitur ex simplicibus rationibus

$(940^\circ \times 10' \times 4'):(4286^\circ \times 12' \times 14') = 100:x$
$(6 \times 24 \times 9):(3 \times 21 \times 8)$ ratio composita formari, et haec composita ratio deinde aequalis est rationi $(100:x)$ caementariorum. Sed ratio

$(940^\circ \times 10' \times 4'):(4286^\circ \times 12' \times 14')$ abbreviata, aequalis

$(470^\circ \times 5' \times 2'):(2143^\circ \times 6' \times 7')$; et
$(6 \times 24 \times 9):(3 \times 12 \times 8) = (2.\ 3.\ 3.):(1\text{M}.7\text{d}.1\text{h}.)$
$= 18:7$. Hinc erit

$$\left.\begin{array}{r} 470:2143 \\ 5:6 \\ 2:7 \\ 18:7 \end{array}\right| = 100:x$$

seu

$$\begin{array}{l} 470 \times 10 : 2143 \times 24,7 = 100:x \\ 3,18 \quad : 7 \end{array}$$

Ergo $470 \times 30 : 2143 \times 49 = 100 : x$. Ut antea.

Coroll. Secundum hanc methodum quivis terminus regulae proportionis jam inveniri poterit, dummodo primum singulae rationes rite expressae, et termini debite locati fuerint.

Exempla regulae aureae compositae methodo data solvendae.

1) Pistrinum (Stampfmühle), cujus tudicula quaevis 80 ℔ ponderat, tundit 1 die, 25 modios. Sit construenda alia mola tudicularia juxta eundem modulum, cujus tudicula 100

℔ ponderet; quantum haec mola poterit molere, si rota prioris quinquies rotetur durantibus 3 rotationibus posterioris. Resp. x modios.

℔ Mod.

Eritque 80:100 = 25:x, et

5: 3 =

seu 4, 8:10, 5 = 25:x

5: 3

et 4: 3 = 25:x. Ergo $x = \frac{3 \times 25}{4}$

seu $x = \frac{75}{4} = 18\frac{3}{4}$ mod.

2) 7 Lignicidae conficiunt per 6 dies 64 orgias lignorum; quot efficient 3 ligna caedentes per 4 dies? Resp. x orgias. Simplices rationes erunt;

Caed. Org.

7 : 3 = 64 : x

6 : 4 = etc. Ex his composita erit

42:12 = 64 : x; seu

7 : 2 = 64 : x. Ergo $x = \frac{2 \times 64}{7} =$

$18\frac{2}{7}$ org.

3) 8 Scribae conscribunt per 5 dies 12 Scapos; quamdiu sufficiet volumen minus 12 scribis? Resp. per x dies. Et erit

scap. dies

12 : 20 = 5 : x, et

12 : 8

144 : 160 = 5 : x; et $x = \frac{800}{144} = 5\frac{5}{18}$ diebus.

4(3 Homines quotidie 7 horis laborantes, absolvunt 2 diebus 84 hexapedas; quot facient 5 homines 3 diebus quotidie 4 horis laborantes?

Resp. x orgias. Et erit

hom. hexap.
3 : 5 = 84 : x
2 : 3 dies
7 : 4 hor. 2

7 : 10 = 84 : x. Ergo $x = \frac{840}{7} = 120$ hexap.

5) Ager continens 10000 orgias ab 8 messoribus 3 diebus metitur; sit ager 6000 orgiarum 1 die metendus, quot messores requiruntur? Resp. x messores.

mess.
Eritque 10000:6000 = 8:x.
1: 3

10000:18000 = 8:x; seu
5:9 = 8:x; ergo
$x = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$.

6) Capitale 100 fl. dat censum annuum 6 fl; quantum est Capitale: si census per 5 annos sit 20000 fl.? Resp. x fl. Capitale. Eritque

Cens. Cap.
6:20000 = 100:x
1: 5

6:100000 = 100:x; ergo $x = \frac{10000000}{6}$ fl.

7) Si 9 ulnae viennenses 10 burgund. efficiant, et 67 ulnae burgundicae 603 fl. holland. veneant; tum 1 fl. holl. 20 Stüv. 105 Stüv. 1 aureum, dant, et 1 holl. aureus 4 fl. 48 cru-

cif. ſtat; quanti ſtant 63 ulnae viennenſes hujusce panni in moneta viennenſi?

9:10=63:x	ſeu 9:2,10=63:x
67:603	67:603, 201
1:20	1:20
105:1	21,105:1
$1:4\frac{7}{15}$	15:67
ſeu	189:1608=63:x
	3 : 1608= 1:x;
	ergo

$x = \frac{1608}{3} = 536$ fl. viennenſ.

8) 5 Aurei holland. dant $26\frac{1}{4}$ fl. holl.; pro 150 fl. in Banco 100 duntaxat obtinentur. Porro 100 imperiales holl. dant Lipſiae $133\frac{1}{4}$ imperiales, et denique 2 holl. imperiales ſtant 5 holl. florenis; quot imperiales lipſienſes ſunt pro 2000 holl. aureis ſolvendi? Reſp. x. Et erit

$5:26\frac{1}{4}=2000:x$	10.20:105=2000:x
5:2	5:2
$100:133\frac{1}{4}$	4,400:533
105:100	105:100
Ergo	200:533=2000:x
	Seu 1:533=10:x
	$x = 5330$ imper. lipſienſ.

B. In Regula catenata.

§. 248. Quodſi conjunctio plurium proportionum in eo conſiſtat, ut ſemper duae illarum, terminum communem habeant, hae inter ſe ita ordinari poſſunt, ut terminus quartus cujusvis proportionis, tertius proportionis ſubſequentis fiat; et

tunc est productum omnium terminorum primorum (antecedentium) ad productum omnium secundorum (consequentium), ut terminus tertius primae proportionis ad terminum quartum ultimae proportionis.

Demonstratio. Sint proportiones sequentes

$a:c = \gamma:\beta$
$d:\gamma = f:\lambda$
$g:h = \lambda:\varphi$
$\varphi:k = x:q$; poterunt nonnullae earum ordinis gratia modo hoc permutari;
$c:a = \beta:\gamma$
$d:f = \gamma:\lambda$
$g:h = \lambda:\varphi$
$k:q = \varphi:x$. Componendo erit

$cdgk:afhq = \beta:x$,

Coroll. 1) Quodsi ergo duae magnitudines sibi invicem conveniant, et una earum, inde etiam ejus ratio, incognita sit, omnes e contrario mediae rationes inter easdem cognitae sint; ratio illa incognita, et haec ex his composita ratio, dant proportionem, ex qua semper incognita illa quantitas inveniri potest. In eo consistit sic dicta regula (ratio) catenata, ususque illius est in cursu permutationis numariae, in permutatione monetae, mensurarum, et ponderum in alia, indigena et externa.

Rationes mediae commodi caussa plerumque abbreviatae duntaxat adhibentur, hinc etiam consequens cujusvis non amplius aequalis manet antecedenti immediate subsequentis rationis, et proportio memorata sequenti lege erit determi-

nanda: Primus antecedens cum primo termino proportionis, quivis consequens cum antecedenti immediate sequentis, et ultimus consequens cum secundo termino proportionis ejusdem denominationis (homogeneus) esse, vel ad illam restitui debet.

Coroll. 2) Quodsi itaque valor de x quaeratur, erit $x \times cdgk = \beta \times afhq$; et

$$x = \frac{afhq}{cdgk}.$$

Coroll. 3) Ex proportionibus ejusmodi componendis, merae aequationes effici possunt, quae postea inter se multiplicantur, et hac ratione etiam ex illis incognita inveniri potest. Est enim ex

$c:a = \beta:\gamma$ futurum $c\gamma = a\beta$
$d:f = \gamma:\lambda$ - - - $d\lambda = f\gamma$
$g:h = \lambda:\varphi$ - - - $g\varphi = h\lambda$
$k:q = \varphi:x$ - - - $kx = q\varphi$; et ex

$cdgk:afhq = \beta:x$, erit $(cdgk)x = (afhq)\beta$; quod utrumque productum hac ratione in aequationes resolvi poterit:

$x = \beta$	vel hac ratione	x	β
$c = a$		c	a
$d = f$		d	f
$g = h$		g	h
$k = q$;		k	q.

Ubi ergo quantitates priores, terminum compositum membri aequationis primi, et posteriores secundi constituunt.

Cor. 4) Theorema mox commemoratum formam ac rationem *regulae catenatae*, continet, in qua propositio prima per x et secunda per β repraesentatur. Factores, in Algebra juxta se poni soliti, hic infra se locantur, et linea divisionis in Algebra horizontaliter duci solita, hic ducitur perpendiculariter. Propositio prima plerumque omittitur, illiusque loco denominatio in formam quaestionis ponitur. V. g.

*?	β	vel	x?	β
c	a		c	a
d	f		d	f
g	h		g	h
k	q.		k	q.

Coroll. 5) Regula composita seu catenata ergo consistit ex continua serie aequationum, in quibus semper denominatio membri 2di praecedentis aequationis etiam denominatio primi membri proxime sequentis fit. Ambae columnae considerantur tanquam producta aequalia, quorum aequalitas utrinque per idem dividendo non turbatur, sed hoc pacto potius utrumque productum simplicius redditur. Sub fine incognita liberatur a suo factore, si utrumque productum per eundem dividatur.

Exempla Regulae catenatae.

1) Quot rhenenses efficiunt 12 jactus Septenariorum?

Operatio.

Cum 1 *Iactus* = 5 *Septenariis*	Vel 5 flor.	12 Iact.
1 *Septenarius* = 7 *cruciferis*	1 jact.	5 ſept.
60 *cruciferi* = 1 *floreno*	1 ſept.	7 cruc.
x *floreni* = 12 *Iact.*	3,60 cruc.	1 fl; ergo
erit $60x$ fl. $= 35 \times 12$	$5x$	35, et
$x = \frac{35\times12}{60} = 7$ flor.	$x = \frac{35}{5} = 7$ fl.	

Hic incognita ratio 12 jact. ad x fl. compoſita eſt ex tribus mediis rationibus his:

1:5 vel 12:60 jactuum ad ſeptenarios
1:7 vel 60:420 ſeptenariorum ad cruciferos
60:1 vel 420:7 cruciferorum ad florenos.

Deberet itaque ſcribi

1:5 = 12:x
1:7
60:1

Ubi 60:35 = 12:x; ſeu
5:35 = 1:x; ergo $x = \frac{35}{5} = 7$ flor.

2) Quot florenos polon. dant 1000 aurei?

Operatio.

Si 50 aurei Viennae dant 101 Imper. in Banco
1 Imperialis = 119 groſſis polonicis
30 groſſi polon. = 1 floreno
x flor. polon. = 1000 aureis. Erit aequalia per aequatia multiplicando:

$$50\times30x = 101\times119\times1000;\ \text{ſeu}$$
$$15x = 101\times119\times10;\ \text{ſeu}$$
$$3x = 101\times119\times2.\ \text{Ergo}$$
$$x = \frac{101\times119\times2}{3} = 8012\tfrac{2}{3}$$

flor. polon.

3) Quaeritur, quot aureos in Banco dent 500 Rubeli (unciales russici)?

Operatio.

Cum 1 Rubelus = $47\frac{1}{2}$ Stuver.
20 Stuver. = 1 fl. holland.
$2\frac{1}{2}$ fl. holl. = 1 holl. Species-Thaler.
100 Species Thl. = 142 Thaler. berolin.
3 Thaler. berol. = 1 aureo Berolini, et pro
105 aureis = 100 in Banco
x aurei in Banco = 500 Rubelis.

Vel $1 = 47\frac{1}{2}$	vel abreviata ~~2~~	~~95~~, 19
$20 = 1$	~~20~~	1
$2\frac{1}{2} = 1$	~~5~~	~~2~~
$100 = 142$	~~100~~	142
$3 = 1$	3	1
$105 = 100$	21, ~~105~~	~~100~~
$x = 500$;	x	~~500~~, ~~100~~, 5
	21 . 3x	$142 \times 19 \times 5$

seu $63x = 710 \times 19$; et $x = \frac{13490}{63} = 214\frac{8}{63}$ aureis in Banco.

4) Mercator lipsiensis curat adferri aureos Amstelodamo; quot imperiales sunt solvendi pro 500 aureis? Si 5 aurei dent 26 florenos;
5 flor. = 2 thaler. holland.
100 thaler. holl. = $133\frac{1}{4}$ imperial. lipsiens.

Operatio.

x Imper. lipſ.	500 aurei	Vel x?	500, 5
5 aurei	26 flor.	5	26
5 flor.	2 thl. holl.	5	2
100 thaler	133¼th.lpſ.	400	533
103 thl. lipſ.	100th.Bnc.	103, 21	100, 2
		21x	26×533×2;

$$\text{ergo } x = \frac{26\times533\times2}{21} = \frac{27716}{21} = 1319\tfrac{17}{21}.$$

5) Duo agricolae agros ſuos permutare volunt. Unus eorum poſſidet agrum 5 juger., qui annue 250 modios procreat, de quibus 1 modius 4 fl. venditur: alter illi daturus ſolum pratenſe dicit: 1 jugerum fert annue 50 centenarios foeni, 1 centenarius ſtat 2 fl. Quantam terram pratenſem debet igitur hic illi dare? Ut nullius annuum vectigal ſolarium diminuatur.

Operatio.

x Iugera prati = 5 Iug. agri	Vel x	5
5 Iugera agri dant 250 modios	5	250,5
1 modius = 4 flor.	1	4, 2
2 flor. = 1 centen. foeni	2	1
50 Centen. dant 1 Iug. prati.	50	1
500x = 20×250 = 5000.	x	10

6) Quot aureos regios dant 3000 Ludovici aurei? Si 1 Ludovicus aureus det 24 gallicas livres, 6 livres 1 thalerum-franco-gallicum a fronte nomen gerentem ſeu 2 fl. 16 crucif. et 13 flor. 20 crucif. 1 aureum regium dent.

Operatio.

1 aureus Lud. = 24 livres	1	24	vel 1	24
6 livres = 2 fl. 16 cr.	6	$2\frac{4}{15}$	90	34
13 flor. 20 cr. = 1 aur. reg.	$\frac{40}{3}$	1	4	3
x aurei reg. = 3000 L. aur.	x	3000	x	3000
	x	20 × 102; seu		

$x = 2040$ aureis regiis.

Cum 3000 aurei ludovici = 2040 aureis regiis; erit 1 ludovicus aureus : 1 aureum regium = 300 : 204 = 150 : 102 = 75 : 51.

7) Detur Exemplum superius 7 (§. 247.), per regulam catenatam resolvendum.

Cum 9 ulnae Vien. = 10 burg.	9	10,2
67 uln. burg. = 603 fl. holl.	67	603,201
1 fl. holland. = 20 Stuber.	1	20.4
150 Stuber. = 1 aur. holl.	105;21	1
1 aureus holl. = 4 fl. 24 cr.	3.15	67
x fl. vienn. = 63 uln. vien	x	63,7
	21 x = 2 × 201 × 4 × 7;	

$$\text{seu } x = \frac{201 \times 56}{21} = \frac{11256}{21} = 536 \text{ fl. vienn.}$$

8) 6 Livres efficiunt 1 thalerum vel uncialem coronatum; 4 thaleri coronati dant duplum aureum regium; aureus regius duplus valet 9 fl.; in qua ratione stant livres ad rhenenses?

Operatio.

6 Livres = 1 thaler. coron.	vel 8 liv. 2	1
4 thal. coron. = 1 aureo reg. dup.	4	1
1 aur. dupl. = 9 flor.; hinc	1	9 3 fl.
6 × 4 Livres = 9 flor.; seu	8 livres	3 flor.

24 Livres = 9 flor. Ergo Livres : ad florenos = 9 : 24 = 3 : 8.

9) Quot efficiunt 100 librae hamburgenses Viennae? Si 5 hamburgenses = 6 vratislaviens.; et 7 vratislavienses = 5 viennensibus sint.

Operatio.

x Vienn.	=	100 Hamburg.
5 Hamb.	=	6 Vratislavien.
7 Vratisl.	=	5 Viennens.
7 x W.	=	600; ergo $x = \frac{600}{7} = 85\frac{5}{7}$ ℔ vienn.

C. *In Regula Reesiana.*

§. 249. *Theorema.* Effectus sunt in ratione composita directa caussarum suarum et temporum, quamdiu caussae istae uniformiter agunt.

Demonstratio. Sint duo effectus E, et e, eorum caussae C, et c, et tempora T, et t. Assumatur tertius effectus 𝔈, ejus caussa sit C, et tempus t. Cum duae caussae aequali tempore agunt, earum effectus sunt ut caussae (id est effectus sunt proportionales suis caussis); major effectus majorem habet caussam, minor minorem caussam supponit caeteris paribus, et vicissim major caussa majorem habet effectum, minor minorem caeteris paribus; hinc erit 𝔈 : e = C : c.

Operatio.

1 aureus Lud. = 24 livres	1	24	vel 1	24
6 livres = 2 fl. 16 cr.	6	$2\frac{4}{15}$	90	34
13 flor. 20 cr. = 1 aur. reg.	$\frac{40}{3}$	1	4	3
x aurei reg. = 3000 L. aur.	x	3000	x	3000

x | 20 × 102; seu

x = 2040 aureis regiis.

Cum 3000 aurei ludovici = 2040 aureis regiis; erit 1 ludovicus aureus : 1 aureum regium = 300 : 204 = 150 : 102 = 75 : 51.

7) Detur Exemplum superius 7 (§. 247.), per regulam catenatam resolvendum.

Cum 9 ulnae Vien. = 10 burg.	9	10,2
67 uln. burg. = 603 fl. holl.	67	603,201
1 fl. holland. = 20 Stuber.	1	20.4
150 Stuber. = 1 aur. holl.	105;21	1
1 aureus holl. = 4 fl. 24 cr.	3,15	67
x fl. vienn. = 63 uln. vien	x	63,7

21 x = 2 × 201 × 4 × 7;

seu $x = \frac{201 \times 56}{21} = \frac{11256}{21} = 536$ fl. vienn.

8) 8 Livres efficiunt 1 thalerum vel uncialem coronatum; 4 thaleri coronati dant duplum aureum regium; aureus regius duplus valet 9 fl.; in qua ratione stant livres ad rhenenses?

Operatio.

6 Livres	= 1 thaler. coron.	vel 6 liv. 2	1
4 thal. coron.	= 1 aureo reg. dup.	4	1
1 aur. dupl.	= 9 flor.; hinc	1	9 3fl.
6×4 Livres = 9 flor.; seu		8 livres	3 flor.

24 Livres = 9 flor. Ergo Livres : ad florenos = 9 : 24 = 3 : 8.

9) Quot efficiunt 100 librae hamburgenses Viennae? Si 5 hamburgenses = 6 vratislaviens.; et 7 vratislavienses = 5 viennensibus sint.

Operatio.

x Vienn.	=	100 Hamburg.
5 Hamb.	=	6 Vratislavien.
7 Vratisl.	=	5 Viennens.
7 x W.	=	600; ergo $x = \frac{600}{7} = 85\frac{5}{7}$ ℔ vienn.

C. In Regula Reesiana.

§. 249. *Theorema.* Effectus sunt in ratione composita directa caussarum suarum et temporum, quamdiu caussae istae uniformiter agunt.

Demonstratio. Sint duo effectus E, et e, eorum caussae C, et c, et tempora T, et t. Assumatur tertius effectus $\mathfrak{E}$, ejus caussa sit C, et tempus t. Cum duae caussae aequali tempore agunt, earum effectus sunt ut caussae (id est effectus sunt proportionales suis caussis); major effectus majorem habet caussam, minor minorem caussam supponit caeteris paribus, et vicissim major caussa majorem habet effectum, minor minorem caeteris paribus; hinc erit $\mathfrak{E} : e = C : c$.

Dum caussa duorum effectuum aequalis vel eadem est, effectus stant in ratione temporum, id est, eadem caussa longiori tempore agens majorem producit effectum, minor minorem caeteris paribus; hinc $E:\mathfrak{E} = T:t$. Ductis terminis inter se, habetur vera proportio. $E:e = CT:ct$.

Vel E 𝔈 e
C Ç c
T t t; erit

𝔈 : e = C : c; et
E : 𝔈 = T : t. Componendo fit

E : e = CT : ct.

Coroll. 1) Si plures uniformiter ad effectum conconferentes caussae adsint: V. gr. praeter *C* et *c* adhuc *K* et *k* etc.; tum etiam stabit:

$E:e = TCK$ etc. : tck etc. Erit nempe in hoc casu ratio effectuum jam ex pluribus caussis composita; idem valet de temporibus.

Coroll. 2) Aequationes jam, quae ex his proportionibus promanant; $Ect = rCT$, vel $Eckt = eCKT$ etc. conficiunt fundamentum, quo *regula reesiana* nititur. Signum aequalitatis (=) exprimitur per lineam verticalem, et juxta se positio factorum permutatur a Reesianis in infra se positionem eorumdem, ferme in hac forma:

e	E	seu	E	e
C	c		c	C
K	k		k	K
T	t		t	T

Et si tempora sint aequalia:

$$\begin{array}{c|c} e & c \\ C & E \end{array}$$

Terminus deficiens plerumque, ut in regula catenata, in initio ponitur, licet et alibi stare posset; ita etiam similes abbrevationes, et praescripta applicantur. V. g.

5 molae serratoriae serrant 6 diebus 200 tabulas; quot asseres serrabunt 8 molae tabulares per 14 dies?

Operatio.

Cum $E:e = CT:ct$, vel $Ect = eCT$; erit

e asser. hic x?	E asser. hic 200	Vel e?	~~200~~, 40 E
C molae 5	c molae 8	C 5	~~8~~, 4. c
T dies 6	t dies 14	T ~~6~~, 3	14. t
		3 e	40×14×4.

Ergo $e = 746\frac{2}{3}$ tabul.

Cum sit $Ect = eCT$; posset debite substitutis valoribus loco quantitatum in hac aequatione, valor incognitae (e) statim inveniri. Est ergo

$$200\times8\times14 = e\times5\times6: \text{ et } \frac{200\times8\times14}{5\times6} = e.$$

Exempla Regulae reesianae.

1) Cum vas plenum aqua salsa 235 grana ponderat, 56 grana salis insunt; quantum inesset salis, si 345 grana ponderaret?

Operatio.

e ? grana ſalis	56 grana ſalis E	vel e ?	56
C gr. ſalſae 235	345 ſalſae c	~~235~~, 47	~~345~~, 69;
Ergo		47.e	56×69

$$e = \frac{56\times69}{47} = 82\tfrac{10}{47} \text{ gr. ſalis.}$$

2) Equi 4 conſumunt per 6 dies 1 Scheffelum avenae; quamdiu ſufficient 24 (menſurae id genus) Scheffeli pro 9 equis?

Operatio.

e	E	vel hic t?	24 Scheffeli e	e?	~~24~~, 8
C	c	c equi 9	6 dies T	~~3~~, ~~9~~	~~6~~, ~~2~~
T	t	EScheffel. 1	4 equi C	1	4

$9\,t = 24\times24$; ſeu $e = 8\times8 = 64$.

Vel $Ect = eCT$; ergo
$1\times9\times t = 24\times4\times6$; ex qua

$$t = \frac{24\times4\times6}{9} = 64.$$

Secundum methodum regulae aureae ſtaret:

Scheffel.				dies		
1	:	24	=	6	:	x
9	:	4	=	x	:	y
9	:	24 × 4	=	6	:	y; ergo y = 64.

3) 7 Lignicidae caedunt 6 diebus 64 orgias lignorum: quot caedent 3 caedentes ligna 4 diebus?

Operatio.

Ect = eCT; et

E	e	Vel hic x?	64
c	C	7	3
t	T	6, 2	4, 2

7 E | 128

$E = \frac{128}{7} = 18\frac{2}{7}$ orgiis. Ut antea.

4) Pro una hebdomade accipit Judaeus quidam pro 1 fl. censum 3 crucifer; quantum lucrantur illi 570 floreni per 12 annos? Hoc pacto.

e	E	Vel hic e?	$\frac{1}{20}$ fl.	Seu 20 e?	1
C	c	1 fl.	570 fl.	4, 1	570, 114
T	t	$\frac{1}{52}$ ann.	12 ann.	1	12, 3
					52

e = 17784 flor. $\qquad$ $e = 52 \times 114 \times 3$.

Vel 1 fl. : 570 fl. = $\frac{3}{60}$: x usurae

$\frac{1}{52} : 12 = x : y$; seu

$60 : 570 = 3 : x$

$1 : 12 \times 52 = x : y$; hinc

$60 : 570 \times 12 \times 52 = 3 : y$ fl. seu

$2 : 57 \times 12 \times 52 = 1 : y$; et

$y = 57 \times 6 \times 52$.

5) Quantum dant censum 20000 fl. Capit. per 12 annos, si pro Centum detur usura annua fl. 6.

Ect = e C, T.

e	E	Vel x?	6
C	c	100	20000, 200
T	t	1	12

$$x = 72 \times 200$$

$$x = 14400.$$

$$\text{Vel } 100 : 20000 = 6 : x$$
$$1 : 12 = x : y$$

$$1 : 2400 = 6 : y$$
$$y = 2400 \times 6 = 14400 \text{ fl. cens.}$$

6) 15 Textores lintearii quotidie per 10 horas laborantes conficiunt 5 hebdomadibus et 3 diebus, partes 50 lintei; quot textores requiruntur, ad efficiendas 120 partes lintei, si hi per 3 hebdomadas et 4 dies quotidie 15 horis laborent. Resp. x textores.

Operatio.

x?	15	seu x:	15
3	5	3	5
4	3	4	3
15	10	15	10
50	120	10, 50	120, 30

$$x = 30 \text{ textor.}$$

D. *In Regula Societatis.*

§. 250. *Regula societatis* est methodus inveniendi quantitates singulis proportionaliter competentes, qui prius societate inita *summam quamdam* contulerunt, eaque vel quidpiam lucrati, vel *damnum commune* passi sunt.

Docet ergo regula societatis datis duabus summis, et unius summae partibus, partes alterius summae invenire.

§. 251. *Problema.* Numerum quempiam $= E$, in 3 partes hac ratione distribuere, quo hae tres partes sint, ut aliae datae f, g, h.

Resolutio et Demonstratio. Sint istae 3 partes x, y, z; erit juxta hypothesin

$f : g = x : y$, seu $f : x = g : y$

$g : h = y : z$ $\quad$ $g : y = h : z$. Inde

$f : h = x : z$ seu $f : x = h : z$. Consequenter $f : x = h : z = g : y$ (rationes aequales). Verum in rationibus aequalibus est summa antecedentium ad summam consequentium, sicut quivis antecedens ad suum consequentem (§. 206.); hinc erit

$$\begin{array}{l} f : x \\ h : z \\ g : y \\ \hline (f+g+h) : (x+y+z) = f : x = g : y = h : z. \end{array}$$

Sed $x+y+z = E$. Ergo

$$(f+g+h) : E = f : x \left\{ \; x = \frac{E \times f}{f+g+h} = \text{parti 1mae} \right.$$

$$(f+g+h) : E = g : y \left\{ \; y = \frac{E + g}{f+g+h} = \text{parti 2dae} \right.$$

$$(f+g+h) : E = h : z \left\{ \; z = \frac{E \times h}{f+g+h} = \text{parti 3tiae} \right.$$

Coroll. 1) Idem valet, si totum in plures partes foret distribuendum: semper erit summa ante-

cedentium ad summam consequentium aequalium rationum, ut quivis antecedens ad suum consequentem, et ex his proportionibus quaevis pars totius distribuendi invenietur.

Coroll. 2) Unde hoc *Theorema:* Si aliquod totum in plures partes distribuendum sit, ita, ut hae partes aliis datis partibus sint proportionales; semper stabit: sicut se habet summa partium datarum ad totum integrum, ita se habet quaevis pars data ad partem quamvis quaesitam.

Coroll. 3) Regula societatis nihil aliud est, quam regula aurea pluries repetita. Est enim

$$(f+g+h):(x+y+z) = f:x = g:y = h:z, \text{ etc.}$$

§. 252. Si plures socii societatem ineunt, et summam conferunt, cuivis eorum de communi lucro tantum proportionalis pars obvenire debet, uti etiam de damno communi pars proportionalis a quovis ferenda. Haec proportionalis compars de lucro vel damno communi eo major est futura, quo majus collatum singuli fuerit; crescit itaque compars quaevis ut collatum singuli crescit, decrescitque, hoc decrescente, caeteris paribus.

Quo major summa communis (collatorum) est, eo majus erit lucrum vel damnum commune, et vicissim, quo minor, eo minus lucrum vel damnum. Quodsi igitur totum lucrum cum totali summa collatorum comparetur; patet manifeste: *Esse totalem summam collatorum ad totum lucrum vel damnum, sicut est collatum singulum ad lucrum vel damnum singulum. Vel collatae summae sunt directe ut lucra; Capitale est ut usura.*

Jam quot ſunt collata ſingula, tot ſunt proportiones ſingulae inducendae, ut inveniatur lucrum vel damnum ſingulum.

Scholion. Exemplum. Conferrat *A* 1000 fl. $= f$
B 3000 fl. $= g$.

Lucrum commune ſit $= 400$ fl. $= e$; ſit hoc *e* diſtribuendum in duas partes *x*, *y*, quae eandem rationem ſervent, ut *f*, *g*. Cum

$f : g = x : y$; ſeu $1000 : 3000 = x : y$; erit (§. 219.)
$f + g : f = (x + y) : x$; ſeu $1000 + 3000 : 1000 = x + y : x$; id eſt;
$f + g : f = e : x$, ſeu $1000 + 3000 : 1000 = 400$ fl. $: x$; ſeu
$f + g : e = f : x$; ſeu $1000 + 3000 : 400$ fl. $= 1000 : x$. Et
$f + g : g = x + y : y$; ſeu $1000 + 3000 : 3000 = 400 : y$; ſeu
$f + g : g = e : y$; ſeu $1000 + 3000 : 400 = 3000 : y$; id eſt:
$f + g : e = g : y$; ſeu $1000 + 3000 : 400 = 3000 : y$. Unde

$$x = \frac{ef}{f+g}; \text{ ſeu } x = \frac{400 \times 1000}{4000} = \frac{400000}{4000} = 100 \text{ fl.}$$

$$y = \frac{ef}{f+g}; \text{ ſeu } y = \frac{400 \times 3000}{4000} = 300 \text{ fl.}$$

Pluribus partibus datis ſimili modo proceditur.
Sit $f : g = x : y$, ſeu $f : x = g : y$
$g : h = y : z$, et $g : y = h : z$; erit ergo
$f : x = h : z$. Sed
$(f + g) : (x + y) = f : x$; hinc etiam
$f + g : x + y = h : z$; ſeu $f + g : h = x + y : z$; hinc

$$(f+g)+h:h=(x+y+z):z; \text{ ergo}$$
$$f+g+h:x+y+z=h:z=f:x=g:y.$$

§. 253. Quodſi collata ſingula pro diverſo tempore facta fuerint; illud collatum majorem partem lucri feret, quod longiori tempore exſtat, et eo quidem majus lucrum dabit, quo diutius ſocietati ſervit. Ergo lucrum ſinguli ita creſcit, ut collatum ſimulque ut tempus quo durante pecunia in ſocietate manet. Lucra igitur ſunt in ratione compoſita ex rationibus directis collatorum et temporum. Si itaque unus conſociatus *a* florenis per *c* menſes *x* florenos lucratur, alterque *b* florenis per *d* menſes *y* florenos; erit

$$\begin{array}{l} a \text{ floren.} : b \text{ floren.} = x:y \\ c \text{ menſ.} : d \text{ menſ.} = \\ \hline \end{array}$$

$$ac:bd=x:y.$$

Id eſt: uſurae ſunt in ratione compoſita capital. et temporum.

Sed etiam erit

$$ac+bd:ac=x+y:x; \text{ et}$$
$$ac+bd:bd=x+y:y; \text{ ſeu}$$
$$ac+bd:x+y=ac:x, \text{ et}$$
$$ac+bd:x+y=bd:y.$$

Idem valet, ſi plures adhuc conſociati eſſent.

Si itaque quodvis collatum per ſuum tempus multiplicetur; erit ſumma horum productorum ad lucrum vel damnum commune, ut quodvis productum ad lucrum vel damnum correſpondens ſingulum.

§. 254. In regula ſocietatis ſimplici ſemper idem eſt tempus cujusvis collati; in compoſita, tempora non ſunt eadem, ſed diverſa. Collatum ergo ſingulum per ſuum tempus eſt multiplican-

dum, ut collata propria inveniantur. Haec jam collata propria primum consummantur, et tum proportio haec: totum lucrum ad singulum lucrum, sicut totale collatum ad collatum singulum vel: summa collatorum ad totum lucrum, ut quodvis collatum ad quodvis lucrum singuli, toties repetitur, quot sunt singula collata. E. g. Detur hoc:

Problema. *A* confert 500 fl. ad 2 annos
B confert 100 fl. ad 6 annos
C confert 360 fl. ad $\frac{1}{3}$ ann.

Lucrum commune sit 600 fl.; quaeritur lucrum cujusvis. Erit collatum

primi $500 \times 2 = 1000$
secundi $100 \times 6 = 600$
tertii $360 \times \frac{1}{3} = 120$; ergo

collatorum summa $= 1720$. Estque

1) $1720 : 600 = 1000 : x$; seu
$43 : 15 = 1000 : x$, et

$$x = \frac{1000 \times 15}{43} = 348\tfrac{39}{43} \text{ fl.}$$

2) $43 : 15 = 600 : y$, et
$y = 209\frac{13}{43}$ fl.

3) $43 : 15 = 120 : z$, et

$$z = \frac{15 \times 120}{43} = 41\tfrac{37}{43} \text{ fl. Ergo}$$

$x + y + z = 600$ florenis

Si omnes ad idem tempus contulissent, proportiones essent simplices; cum autem illi plus obvenire debeat, qui suam pecuniam diutius usuris permittit, rationes invicem componendae sunt, et

quia usurae sunt in ratione composita directa capitalium et temporum; collatum cujusvis consociati per suum tempus multiplicetur. Tum effertur

A confert $500 \times 2 = 1000$ fl.
B confert $100 \times 6 = 600$ fl.
C confert $360 \times \frac{1}{3} = 120$ fl.; hoc pacto collata ad idem tempus reducuntur; nam si *A* 500 fl. ad 2 annos confert, id idem est, ac si *A* 1000 flor. ad 1 annum conferret; et si *B* 100 fl. ad 6 annos conferrat, idem, ac si *B* 600 fl. ad 1 annum daret; ita etiam si *C* 360 fl. ad $\frac{1}{3}$ ann. confert, id tantundem est, ac si *C* 120 fl. ad 1 annum conferret. Jam totum novum collatum emergens est ad totum lucrum, sicut collatum singulum ad lucrum singuli. Haec proportio ter repetitur, et lucrum singulum invenitur.

E. *In Regula Alligationis vel Mixtionis.*

§. 255. Regulae societatis *Regula Alligationis vel Mixtionis* similis est; docet haec enim invenire, quantum de quavis materia simplici ad datam copiam mixtae accipiendum sit, si rationes simplicium datae fuerint. Consequenter simili etiam modo resolvitur. Proponatur v. g. sequens

Problema. Ut bonus pulvis pyrius obtineatur, ad 1 ℔ salis nitri accipiendae sunt 6 semiunciae carbonum, et 4 semiunciae sulphuris; seu 16 semiunciae salis nitri, 3 semiunciae carbon. et 2 semiunc. sulphur. dant mixtae pulverem pyrium probum; sint 1000 ℔ pulveris pyrii conficiendae; quantum de quavis specie esset accipiendum?

Resolutio. Sit $f = 16$ semiunc. sal. nitri
$g = 3$ sem. carbon.
$h = 2$ sem. sulphur.

Erit $f+g+h = 16+3+2 = 21$; et
$f+g+h : x+y+z = 21 : 1000$. Porro
$21 : 1000 = f : x = 16 : 761\frac{19}{21}$
$21 : 1000 = g : y = 3 : 142\frac{18}{21}$
$21 : 1000 = h : z = 2 : 95\frac{5}{21}$. Ergo

$x+y+z = 1000 = 761\frac{19}{21} + 142\frac{18}{21} + 95\frac{5}{21}$.

Coroll. 1) Quemadmodum ergo sunt
$21 : 1000 = 16 : x$ sem. sal. nitri ℔
$21 : 1000 = 3 : y$ ℔ carbonum
$21 : 1000 = 2 : z$ ℔ sulphur. Id est:
Summa partium datarum est ad totum mixtum, sicut quaevis pars data, ad partem mixti quaesitam.

Coroll. 2) Quodsi rationes materiarum simplicium commiscendarum non dentur, sed potius quaeratur, qua ratione duae pluresve materiae commiscendae sint, ut pretium medium emergat; v. g. si caupo plura genera vinorum miscere vult; hae partes ipsae commiscendae prius erunt inveniendae, antequam mixtio fieri possit. Hujusmodi computationes alligationis, vel id genus problamata resolvuntur per aequationes methodo ibidem data.

Scholion. Regulam *falsi*, nec non regulam *coeci*. cum non sint verae regulae, sed merae tentationes, prorsus negligere potest Analysta.

Caput X.

De Progressione geometrica.

§. 256. *Progressio geometrica* est series numerorum paribus vicibus crescentium vel decrescentium. Numerus indicans, quoties (quot vicibus) termini majores vel minores fiant, appellatur *exponens* (Nenner) progressionis; et illi numeri naturales, qui sub terminos progressionis scribantur, ut indicent, quotus terminus quivis sit, vocantur *indices* (numeratores, Zeiger); *ultimus* determinat *numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= 2$, et exponens $= 2$; erit progressio sequens: $\overset{1}{2}, \overset{2}{4}, \overset{3}{8}, \overset{4}{16}, \overset{5}{32}, \overset{6}{64}, \overset{7}{128}, \overset{8}{256}, \overset{9}{512}$ - - - - - *crescens* vel *adscendens*.

Sit exponens $= \frac{1}{2}$; et terminus primus $= 128$; erit progressio sequens: $\overset{1}{128}, \overset{2}{64}, \overset{3}{32}, \overset{4}{16}, \overset{5}{8}, \overset{6}{4}, \overset{7}{2}, \overset{8}{1}, \overset{9}{\frac{1}{2}}, \overset{10}{\frac{1}{4}}, \overset{11}{\frac{1}{8}}, \overset{12}{\frac{1}{16}}, \overset{13}{\frac{1}{32}}, \overset{14}{\frac{1}{64}}$ - - - - *decrescens* vel *descendens*.

Sit generaliter terminus primus $= a$, communis exponens $= q$, et ultimus indicator $= n$; erit progressio sequens:

$$\overset{1}{a}, \overset{2}{aq}, \overset{3}{aq^2}, \overset{4}{aq^3}, \overset{5}{aq^4}, \overset{6}{aq^5}, \overset{7}{aq^6}, \overset{8}{aq^7}, \overset{9}{aq^8}, \overset{10}{aq^9}, \overset{11}{aq^{10}}, \overset{12}{aq^{11}}, \overset{13}{aq^{12}} \; - - - - - \; \overset{n}{aq^{n-1}}.$$

Coroll. 1) Ergo *quivis terminus* progressionis, vel *n*tesimus terminus aequalis est producto ex ter-

mino primo (a), in illam potentiam exponentis communis (q), cujus exponens (n—1), unitate minor est, quam index termini (n). Id est: omnis terminus aequalis est termino primo ducto in exponentem communem elevatum ad tantam potentiam quot termini sunt dempta 1 unitate.

Coroll. 2) Terminus itaque ultimus vel w aequalis est aq^{n-1}, seu in *formula*

$$w = aq^{n-1}.$$

§. 257. *Theorema.* Quivis terminus progressionis geometricae est medius geometrice proportionalis inter quosvis duos in progressione ab illo aequidistantes terminos.

Demonstratio. Sit enim aq^r quiscunque terminus progressionis geometricae; indicabunt aq^{r-s} et et aq^{r+s} quosvis terminos duos. qui ab illo in progressione aequidistant. Atqui $aq^{r-s} : aq^r = aq^r : aq^{r+s}$ constituunt proportionem geometricam continuam; in qua aq^r est medius proportionalis; ergo aq^r seu quivis terminus progr. geomet. est medius geom. proportionalis inter quosvis duos aequidistantes terminos.

Coroll. Quodsi igitur tres illae quantitates proportionis geom. continuae, terminos progressionis geom. constituant; ambo externi in progressione simul etiam a mediis aequidistabunt. Nam si fuerit

$x : y = y : u$, et

$x = aq^{r-s}$

$y = aq^r$; erit

$aq^{r-s} : aq^r = aq^r : u$; hinc

$u = aq^{r+s-r+s} = aq^{r+s}$.

§. 258. *Theorema.* Quilibet duo termini progressionis geometricae sunt in ratione directa cum quibusvis aliis duobus in progressione eadem ab invicem aequidistantibus terminis.

Demonstratio. Sint enim aq^r et aq^{r+s} quicunque duo termini progressionis geometricae; erunt aq^m et aq^{m+s} quicunque duo alteri, qui ut illi a se aequidistant. Erit autem

$$aq^r : aq^{r+s} = aq^m : aq^{m+s}$$

proportio vera; ergo etc.

Coroll. 1) Quodsi igitur quantitates illae quatuor proportionis geometricae terminos progressionis geometricae constituant; postremi duo in progressione semper quoque pariter ab invicem distabunt, ut priores duo. Id est: si eadem sit utrobique majoris ad minorem ratio, eadem est et utrobique distantia.

Coroll. 2) Cum medius terminus in progressione imparis numeri terminorum ab ambobus extremis aequidistet; is terminus semper etiam est medius geometrice proportionalis inter eosdem, hinc quadratum illius aequale producto ex his.

Coroll. 3) Quodsi duo termini progressionis geometricae ab ambobus extremis aeque distent, etiam secundus ex his quatuor a primo aeque ut quartus a tertio distat; ergo constituunt proportionem geometricam. Igitur productum quorumvis duorum terminorum ab ambobus extremis aequidistantium, semper aequale est producto ex utroque extremo, ergo etiam aequale producto ex quibuscunque aliis duobus, iterum ab ambobus extremis aeque distantibus terminis.

Coroll. 4) Cum in omni progreſſione geometrica terminus 1mus ad 2dum, ſicut 2dus ad 3tium, ſicut 3tius ad 4tum, ſicut 4tus ad 5tum, et ita porro ſit; erit ratio 1mi (a) ad *n*teſimum terminum (aq^{n-1}) ex (n—1) aequalibus rationibus compoſita, ergo aequalis rationi potentiae (n—1)mae primi termini ad (n—1)mam potentiam termini ſecundi, ſeu aequalis rationi potentiae (n—1)mae cujusvis termini ad potentiam (n—1)mam proximae ſequentis. Seu erit

$$a : aq^{n-1} = (aq^p)^{n-1} : (aq^{p+1})^{n-1}.$$

§. 259. Summa omnium terminorum progreſſionis geometricae minus ultimo eſt ad ſummam omnium terminorum dempto primo, ſicut terminus 1mus ad 2dum, vel ſicut quivis terminus ad proxime ſequentem, vel ſicut 1 ad exponentem communem.

Demonſtratio. Cum rationes hae:

$a : aq$ $aq : aq^2$ $aq^2 : aq^3$ $aq^3 : aq^4$ $aq^4 : aq^5$ $aq^5 : aq^6$, et ita porro $aq^{n-2} : aq^{n-1}$	inter ſe aequales ſint; et in rationibus aequalibus ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium ſit, ut quivis antecedens ad ſuum conſequentem; erit ſummando antecedentes et conſequentes:

$(a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 \dots + aq^{n-2})$ ad $(aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 \dots + aq^{n-1})$, ſicut $a : aq = aq : aq^2 = aq^2 : aq^3 = 1 : q$ (§. 206. et 205). Sed primus terminus proportionis hujus continet omnes terminos progreſſionis geo-

metricae demto ultimo, et terminus secundus ejusdem omnes terminos demto primo. Si itaque summa omnium terminorum exprimatur per S, ultimus terminus per w; erit ex hac proportione:

$(S-w):(S-a) = a:aq = aq:aq^2 = 1:q$. Id est $S-w : S-a = 1:q$; seu

Summa terminorum demto ultimo ad summam terminorum ablato primo, sicut unitas ad exponentem communem q. Q. E. D.

Coroll. Ex hac proportione $S-w : S-a = 1:q$ potest jam formula generalis pro summa omnium terminorum progressionis geometricae, vel aequatio Summae inveniri. Est enim $(S-w)q = S-a$, seu

$Sq-qw = S-a$; et $Sq-S = qw-a$; seu

$S(q-1) = qw-a$. Ergo $S = \frac{qw-a}{q-1}$. Et quia

$w = aq^{n-1}$ (§. 256. Cor. 2.), substituto valore de w in valore de S; erit etiam

$$S = \frac{q \times aq^{n-1} - a}{q-1} = \frac{aq^{n-1+1}-a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1}$$

(§. 71.).

§. 260. Aequatio Summae vel pro S potest etiam hoc modo inveniri.

Exhibitio. Summa omnium terminorum, seu

$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 \ldots + aq^{n-1}$; totam aequationem hanc per q (exponentem) multiplicando, obtinetur

$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7 \ldots + aq^{n-1} + aq^n$. Si aequatio ſuperior ab inferiore ſubtrahatur; quivis terminus progreſſionis ſuperioris proxime praecedentem inferioris tollet, tantum a terminus primus ſuperioris, et aq^n ultimus inferioris remanebunt; hinc erit

$Sq - S = aq^n - a$. Igitur $S(q-1) = aq^n - a$; et

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Et cum $w = aq^{n-1}$; erit etiam

$$S = \frac{qw - a}{q-1}.$$

§. 261. Formulae jam hic ſequentes habentur.

I. 1) $w = aq^{n-1}$; ex qua

2) $a = \frac{w}{q^{n-1}}$;

3) $q = \sqrt[n-1]{\left(\frac{w}{a}\right)}$.

4) $n = 1 + \frac{\log. w - \log. a}{\log. q}$ (Vid. §. 284.).

Ex aequatione termini ultimi itaque ſemper terminus primus et ultimus inveniri poteſt, cumprimum reliqui tres termini fuerint cogniti; exponens q et numerus terminorum n autem tunc, quando computationes Logarithmicae, et methodus altiorem radicem tertia extrahendi notae futurae ſint.

II. 1) $S = \frac{qw - a}{q - 1}$, seu $Sq - S = qw - a$; ex hac

$a = qw - Sq + S$; seu

2) $a = qw - (q - 1)S$;

3) $w = \frac{a + (q - 1)S}{q}$; et

4) $q = \frac{S - a}{S - w}$.

Quodsi itaque tres ex his quantitatibus a, q, w et S datae fuerint; semper etiam quarta inveniri poterit.

Exemplum. Quidam equum suum juxta clavos soleares, venditurus postulat pro primo clavo 1 teruncium, pro secundo 2 teruncios, pro tertio 4 teruncios, pro 4to 8 teruncios, et pro quovis clavo semper duplum prioris. Quaeritur, quanti equus constaret, si 32 clavos soleares haberet?

Pretium hujus equi aequale est summae 32 terminorum progressionis geometricae, cujus primus terminus = 1 teruncio, et exponens = 2 (binario). Hinc quia $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$; erit hic

$S = 2^{32} - 1$ (terunciis). Est autem

$2^9 = 512$

$2^9 = 512$; ergo

1024
512
2560

$2^{18} = 262144$

$2^9 = 512$; ergo

524288
262144
1310720

$2^{27} = 134217728$; et

$2^5 = 32$; ergo

268435456
402653184

$2^{32} = 4294967296$ (terunciis); hinc

$S = 2^{32} - 1 = 4294967295$ terunciis

$S = 1073741823\frac{3}{4}$ cruciferis. Et

$S = 17895697$ florenis, $3\frac{3}{4}$ cruciferis.

§. 262. *Coroll.* Quodsi exponens progressionis geometricae q minor 1 unitate, vel fractio sit; termini ejusdem continuo minores fiunt, et cum progressio in infinitum regrediatur (descendat), decrescunt supra omnes limites (fines) in se determinatos. Igitur in tali casu terminus ultimus seu w

evanescit, seu w fit $= 0$. Et substitutione in valore de S facta, erit Summa seu

$$S = \frac{qw - a}{q - 1} = \frac{0 - a}{q - 1} = \frac{-a}{q - 1}; \text{ seu}$$

$$Sq - S = -a; \text{ et } a = S - Sq = (1 - q)S.$$

$$\text{Ergo } S = \frac{a}{1 - q};$$

$$q = \frac{S - a}{S}.$$

Si itaque duae ex his tribus quantitatibus a, q, et S progressionis geometricae in infinitum decrescentis datae fuerint; semper etiam tertia inveniri poterit.

Sit E. gr. Progressionis infinitae terminus primus $= 1$, et exponens $= \frac{1}{2}$; erit Summa ejusdem seu $S = \frac{a}{1 - q} = 1 : (1 - \frac{1}{2}) = 1 : \frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$.

Scholion. Posset Summa statim ex generali formula debita substitutione inveniri. Uti

$$S = \frac{qw - a}{q - 1}, \text{ hic } = \frac{-1}{\frac{1}{2} - 1} = -1 : -\tfrac{1}{2} = +2.$$

§. 263. Aequatio Summae progressionis geometricae in infinitum decrescentis, cujus termini mutuo (alternando) positivi et negativi fiunt, invenitur hoc modo;

Exhibitio. Summa omnium id genus terminorum, seu

$S = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 - aq^5 + aq^6 - + - + -;$

multiplicando aequationem hanc per q; erit

$Sq = aq - aq^2 + aq^3 - aq^4 + aq^5 - aq^6 + aq^7 - + - + - +$

Si ambae aequationes adduntur; quivis terminus progressionis superioris proxime praecedentem inferioris in infinitum tollit; solum S, a et Sq restat; igitur erit

$S + Sq = a$; seu $(1 + q)\,S = a$; et

$$S = \frac{a}{1+q};\quad q = \frac{a-S}{S}.$$

Quodsi a aequale esset 1; esset $S = \dfrac{1}{1+q}$.

Caput XI.

De Logarithmis.

§. 264. *Logarithmi* dicuntur numeri progressionis arithmeticae subscripti numeris progressionis geometricae. Sit V. gr. progressio geometrica et progressio arithmetica, et terminus termino subscriptus:

$\frac{a}{q^4}$	$\frac{a}{q^3}$	$\frac{a}{q^2}$	$\frac{a}{q}$	a	aq
c—4d	c—3d	c—2d	c—d	c	c+d

aq^2	aq^3	aq^4	etc.
c+2d	c+3d	c+4d	etc.;

termini progressionis arithmeticae appellantur *Logarithmi*, et termini progressionis geometricae *Numeri horum Logarithmorum*. Ita $(c+d)$ erit Logarithmus numeri (aq), et $\frac{a}{q^2}$ erit numerus Logarithmi $(c-2d)$.

Est ergo Logarithmus terminus progressionis arithmeticae, qui termino progressionis geometricae respondet.

Logarithmi illi, qui semel jam assumpto et determinato valore numeri q, cuivis numero pertinent, conficiunt *Systema Logarithmicum*, et numerus q vocatur *basis* (Grundzahl) ejusdem.

Scholion. Nomen Logarithmi significat id, quod αϱιδμος λογων (numerus rationum); nam Logarithmus indicat, quoties ratio $1:q$ in reliquis $1:q^2$, $1:q^3$ etc. contenta sit.

§. 265. Quodsi inter quosvis duos numeros medius geometrice proportionalis, et inter logarithmos eorum medius arithmetice proportionalis quaeratur, ut $\frac{a}{q^{\frac{3}{2}}} : \frac{a}{q} = \frac{a}{q} : \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}}$; et $\frac{a}{q} : \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}} : a$;

et $\frac{a}{q^{\frac{1}{2}}} : a = a : aq^{\frac{1}{2}}$; et $a : aq^{\frac{1}{2}} = aq^{\frac{1}{2}} : aq$; etc.

Tum $\left(c - \frac{3d}{2}\right) - (c - d)$

$= (c - d) - \left(c - \frac{d}{2}\right)$; et

$(c - d) - \left(c - \frac{d}{2}\right) = \left(c - \frac{d}{2}\right) - c$; etc.

Sequentes duae progreſſiones inveniuntur:

$\frac{a}{q^{\frac{3}{2}}}, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}}, a, aq^{\frac{1}{2}}, aq, aq^{\frac{3}{2}}, aq^2$ - - - - etc.

$c - \frac{3d}{2}$, $c - d$, $c - \frac{d}{2}$; c, $c + \frac{d}{2}$, $c + d$, $c + \frac{3d}{2}$

$c + 2d$ - - - - etc.

Quocunque ergo modo logarithmi aſſumpti fuerint; inter quosvis duos *numeros*, et eorum *logarithmos* ſecundum hanc methodum adhuc infinite multi numeri una cum eorum logarithmis inveniri poterunt.

§. 266. Cum termini progreſſionis geometricae ſemper poſitivi maneant, termini vero arithmeticae, $c-d$, $c-2d$, $c-3d$, vel $c-nd$, negativi fiant ſimul ac d, ergo et $2d$, $3d$, vel nd majus quam (c) fiat; perſpicuum eſt: tum poſitivos, cum negativos Logarithmos ſemper ad *poſitivos numeros* tantum pertinere poſſe. Et quod ergo: *Logarithmi numerorum negativorum impoſſibiles ſint.*

§. 267. Si quatuor numeri proportionem geometricam conſtituant; duo priores in progreſſione geometrica ita ab invicem diſtant, ut duo poſteriores; hinc etiam Logarithmi duorum priorum

in progressione arithmetica mutuam a se distantiam, cum Logarithmis postremorum duorum habent; igitur, hi quatuor Logarithmi constituunt proportionem arithmeticam. Et vicissim, si 4 Logarithmi in proportione arithmetica constituti sint, priores duo in arithmetica progressione ita a se invicem distant, ut posteriores duo; ergo etiam numeri duorum priorum in geometrica progressione ita a se invicem distant, ut numeri postremorum duorum; hi numeri igitur constituunt proportionem geometricam.

Igitur quatuor numeri semper sunt in proportione geometrica, cumprimum Logarithmi eorum in proportione arithmetica sint: et cumprimum 4 numeri in proportione geometrica constituti fuerint; eorum Logarithmi dabunt proportionem arithmeticam. Id est: Si fuerit

$\log. a - \log. b = \log. c - \log. d$; semper etiam erit:

$$a : b = c : d$$

Et si fuerit $m : n = p : q$; semper quoque erit:

$\log. m - \log. n = \log. p - \log. q$.

§. 268. Si $a = 1$, et $c = o$ assumatur; progressiones illae generales in sequentes permutantur:

$$\frac{1}{q^4}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, q^4, \text{etc.}$$

$$-4d, -3d, -2d, -d, o, d, 2d, 3d, 4d, \text{etc.}$$

Cumprimum ergo o (zerus) Logarithmus unitatis fit; Logarithmi positivi pertinent ad numeros positivos, qui majores sunt unitate, et Logarithmi

negativi ad numeros positivos, qui minores sunt quam 1, seu ad fractiones veras.

§. 269. *Problema.* Invenire Logarithmum Producti, quod V. g. sit pq.

Resolutio. Cum sit $1 : p = q : pq$; erit

$\log. 1 - \log. p = \log. q - \log. pq$ (§. 267.); et

$\log. pq = \log. p + \log. q - \log. 1.$ (§. 187.).

Igitur, quia $\log. 1 = 0$ (§. 268.); est

$\log. pq = \log. p + \log. q.$

Logarithmus producti itaque aequalis est summae Logarithmorum factorum suorum.

Hinc etiam erit $\log. pqrs = \log. p + \log. q + \log. r + \log. s.$

§. 270. Sit quaerendus Logarithmus fractionis seu Quoti $\frac{p}{q}$. Sit $\frac{p}{q} = x$; erit $p = qx$; et cum aequales numeri aequales habeant Logarithmos, est: $\log. p = \log. px = \log. q + \log. x$; et

$\log. p - \log. q = \log. x.$ Ergo ob $x = \frac{p}{q}$;

$$\log. \frac{p}{q} = \log. p - \log. q.$$

Logarithmus igitur *fractionis* aequalis est Logarithmo numeratoris minus Logarithmo denominatoris, seu *Logarithmus Quotientis* aequalis Logarithmo dividendi dempto Logarithmo divisoris.

§. 271. *Problema.* Invenire Logarithmum potentiae cujuspiam quantitatis.

Resolutio. Cum $x^2 = xx$; et log. x^2 = log. xx = log. x + log. $x = 2$ log. x; erit

log. $x^3 = 2$ log. x + log. $x = 3$ log. x;

log. $x^4 = 3$ log. x + log. $x = 4$ log. x;

log. $x^5 = 4$ log. x + log. x; et generaliter

log. $x^n = n.$ log. x. Igitur

Logarithmus cujuslibet potentiae quantitatis cujuspiam aequalis est Logarithmo, quantitatis ducto in exponentem potentiae. Unde erit

log. $x^1 = 1.$ log. x = log. x.

Log. $x^0 = 0 \times$ log. $x = 0$.

Logarithmus de x^0 aequalis zero; igitur numerus huic Logarithmo correspondens $= 1$, et igitur $x^0 = 1$.

§. 272. *Problema.* Invenire Logarithmum cujuslibet radicis quantitatis cujuspiam.

Resolutio. Cum $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (§. 77.); et

$$\log. \sqrt[n]{x} = \log. \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n}. \log. x = \frac{\log. x}{n}$$

(§. 271.);

erit etiam log. $\sqrt[n]{x} = \frac{\log. x}{n}$. Hinc

Logarithmus cujusvis radicis quantitatis cujuspiam aequalis est Logarithmo quantitatis diviso per exponentem radicis (radicalem).

Ita log. $\sqrt[3]{x} = \frac{\log. x}{3}$; log. $\sqrt[4]{a} = \frac{\log. a}{4}$.

Log. $\sqrt[5]{a} = \frac{\log. a}{5}$.

§. 273. Sit $d = 1$; et $q = 10$; progressiones praecedentes permutantur in sequentes:

$\frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, etc.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 etc. Seu

10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 etc.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Hinc: *Quivis numerus aliqua potentia* exponentis communis (progressionis), et ejus *Logarithmis* semper exponens hujus potentiae est.

Unde etiam intelligitur, *Logarithmos quantitatum esse exponentes earumdem quantitatum.*

Tales sunt logarithmi ii, de quibus Clariss. Dom. Euler. affirmat, quod, si b sit quantitas constans, et $b^q = c$; q sit Logarithmus numeri c. Nam cum q sit Logarithmus de b^q; erit etiam q Logarithmus istius c, cum primum c aequale sit b^q.

§. 274. Progressiones praecedentes etiam hoc modo repraesentari possunt:

$\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000, 10000,

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Hac ratione Logarithmi pro potentiis decenarii determinati, et secundum hanc determinationem posthac etiam Logarithmi reliquorum numerorum calculati fuerant.

Inventor Logarithmorum, qui primus Systema Logarith. calculo subjecit. erat Ioann. Neper. L. B. a Merchiston, Scotus, quod ille Ann. 1614. Edimburgae sub titulo: *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria et omni Logistica mathematica explicatio,* edidit, quamvis jam *Michael Stiefel.* Ideam veram Logarithmorum habuerit, ut ex sua *Arithmetica integra.* Norimb. 1544. Libr. I. Cap. IV. VI. et Libr. III. Cap. V. apparet.

Videamus jam, quomodo haec Calculatio praestari potuerit.

§. 275. Logarithmus unitatis, seu log. $1=0$; log. $10=1$. Sed inter 1 et 10 existunt adhuc 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, et st., unacum copia fractionum. Log. $100=2$; at inter 10 et 100 sunt omnes numeri a decenario usque ad 99 cum fractionibus adhaerentibus. Log. de $\frac{1}{10}=-1$; et log. $\frac{1}{100}=-2$: verum inter hos adhuc infinite multae fractiones existunt. Qua ratione jam Logarithmi horum intermediorum numerorum potuerant inveniri?

Postquam logarithmus unitatis et logarithmus decenarii inventi erant, inveniebantur logarithmi numerorum inter 1 et 10 jacentium, et singulatim quidem investigandi erant logarithmi numerorum 2, 3, 5, 7: nam logarithmi numerorum 4, 6, 8 et 9 facile inveniri possunt, prioribus jam inventis.

Cum autem Logarithmus numeri 10 primum = 1, id eſt unitati integrae, et ille unitatis = 0, id eſt = nulli integrae unitati ſit; jam per ſe patet, logarithmos numerorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et fractionum adhaerentium nullos integros numeros continere poſſe, ſed tantum partes unitatis. Hae partes unitatis, vel fractiones vero in decimalibus expreſſae fuerant, quia etiam in tabulis logarithmicis geometrica progreſſio numerorum juxta ſeriem decadicam aſſumpta eſt, utpote accommodatiſſima.

Si inter duos numeros medius geometrice proportionalis, et inter logarithmos eorumdem medius arithmetice proportionalis quaeratur; hic ſemper eſt logarithmus illius (§. 265.). Quodſi igitur logarithmi numeri dati inveniendi cauſſa medius geometrice proportionalis numerus inter proxime majorem et proxime minorem ex numeris illis, quorum logarithmi jam cogniti (inventi) ſint, et inter eorum logarithmos medius arithmetice proportionalis quaeratur; invenientur logarithmi numerorum, qui dato continue minus differunt.

Ita pro inveniendo logarithmo binarii ſequens calculus inſtituendus:

Sit x medius proportionalis ad 1 et 10; erit $1:x = x:10$; et $x^2 = 10$. Ergo $x = \sqrt{10}$.
$\sqrt{10} = 3,1622776610$; verum
Log. $1 -$ log. $x =$ log. $x -$ log. 10 (§. 267.), et
2 log. $x =$ log. 10 (§. 271.); ergo ob log. $x = 1$;
Log. $x = \frac{1}{2}$ log. $10 = \frac{1}{2} = 0,5$. Seu

I. Log. $3,1622776601 = 0,5$.

Sit y medius proportionalis ad 1 et x; erit

$$1 : y = y : x;$$ et

$y = \sqrt{x} = \sqrt{(3,1622776601)}$, seu.

$y = 1,7782794100$. Verum

$$\text{Log.}\, y = \frac{\log. x + \log. 1}{2} (\text{§. } 267.) = \frac{0,5 + 0}{2};$$

$$\log. y = 0,25.$$ Ergo

II. Log. $1,7782794100 = 0,25$.

Sit z medius geometr, proportionalis ad y et x; erit $y : z = z : x$; et $z = \sqrt{xy}$; seu

$z = \sqrt{(3,1622776601 \times 1,7782794100)}$; seu

$z = 2,3713737056$. Sed

$$\text{Log.}\, z = \frac{\log. x + \log. y}{2} = \frac{0,5 + 0,25}{2} = \frac{0,71}{2} =$$

$0,375$; hinc

III. Log. $2,3713737056 = 0,375$.

Si hoc modo computatio ulterius continuetur; invenietur demum logarithmus numeri, qui jam a binario nec $\frac{1}{10000000}$ (una decimillionesima) parte differt, qui ergo omnino tanquam logarithmus numeri 2 ipsius assumi potest, quin hoc pacto error aliquis in praxi oriatur.

§. 276. Invento jam hac methodo logarithmo binarii. facile inveniuntur:

1) Logarithmus de 4, 8, 16, et omnium numerorum, qui ut potentia aliqua binarii, aut tanquam productum ex binario, et numero illo, cujus logarithmus notus sit, spectari possunt; nam

$\log. 4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2$;

$\log. 8 = \log. 2^3 = 3 \log. 2$; et ita porro.

2) Logarithmi fractionum earum, quarum numerator et denominator 1, 2, 10, vel potentia de 1, 2, 10, aut productum ſit, quod ex his factoribus erat ortum.

Hac methodo calculabantur etiam logarithmi numerorum 3, 5, 7, et generatim omnium numerorum primorum, et ex his tunc logarithmi pro reliquis numeris omnibus, cum omnes hi producta ex illis ſint.

§. 277. Logarithmi pro omnibus numeris integris ab 1 uſque 100000 jam actu calculati, et et in ſic dictas tabulas (libellis) logarithmorum numerorum naturalium compoſiti (digeſti) exiſtunt.

Pleraeque autem tantum uſque 10000 exſtant, et in nulla earumdem logarithmi fractionum calculati dantur.

Debemus itaque *uſum* hujusmodi tabularum monſtrare, ut ope earumdem logarithmus cujusvis numeri, et numerus cujuslibet logarithmi inveniri poſſit.

§. 278. Eſt ergo

Log. 1 = 0		Log. $\frac{1}{10}$ = — 1
Log. 10 = 1		Log. $\frac{1}{100}$ = — 2
Log. 100 = 2		Log. $\frac{1}{1000}$ = — 3
Log. 1000 = 3		Log. $\frac{1}{10000}$ = — 4
Log. 10000 = 4		Log. $\frac{1}{100000}$ = — 5
Log. 100000 = 5		etc.
etc.		

Hi logarithmi accurate determinati, logarithmi reliquorum numerorum vero per approximationem inventi erant. Logarithmi numerorum inter 1 et

10 intercedentium, nullum integrum; ſed meros decimales continent; logarithmi numerorum ab 10 uſque 100 habent unum integrum atque tot decimales, ut approximatio ducatur (vulgo 7 decimales); logarithmi numerorum a 100 uſque 1000 continent duo integra una cum decimalibus; logarithmi numerorum a 1000 uſque 10000 continent 3 integra cum decimalibus; logarithmi numerorum a 10000 uſque ad 100000 continent 4 integra cum adjunctis decimalibus; et ita porro.

Omnis ergo logarithmus pro integris 1 unitate minus obtinet, quam ejus numerus continet notas. Poteſt igitur determinari, quot integra logarithmus numeri dati (reſpondens) habere debeat; et viciſſim ex integris logarithmi dati cognoſcitur, quot cyfras numerus logarithmo huic reſpondens continere debeat.

Numerus integrorum, ex quibus omnis logarithmus conſtat, dicitur *characteriſtica* *ejusdem*, et decimales adjunctae dicuntur *mantiſſa*.

Si igitur numerus datus *n* *cyfris* conſtet, characteriſtica ejus logarithmi eſt $(n-1)$; et ſi characteriſtica logarithmi cujuspiam *n* *ſit*; numerus ejusdem conſtat $(n+1)$ cyfris vel notis.

§. 279. *Ope tabulae logarithmorum*, quae numerum 10000 non excedat, ut illa ab *A.* Vlacq, *invenire logarithmum omnis Numeri dati.*

Reſolutio. 1) Si numerus datus ſit numerus integer infra 10000 (minor quam 10000); invenitur ejus logarithmus in tabulis ipſi adpoſitus. Ita eſt log. $84 = 1,9242793$; et log. $9999 = 3,9999566$; et ita porro.

2) Quod ſi datus numerus fractus i. e. fractio fuerit, cujus numerator et denominator minores quam 10000 ſint; obtinetur ejus logarithmus, ſi logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris ſubtrahatur. V. g. ſit inveſtigandus lo- logarithmus numeri fracti $\frac{48}{720}$. Erit

log. 48 = 1, 6812412, et
log. 720 = 2, 8573325 Subtracto

— 1, 1760913 = log. $\frac{48}{720}$.

3) Si fractio mixta data ſit, vel ſi numero dato adhuc fractio adhaereat; integra et fractio (totus numerus) ad eundem denominatotem reducuntur, tum in tabula logarithmus denominatoris quaeritur, ſubduciturqne a logarithmo numeratoris. Dummodo in hoc caſu numerator tabulam non excedat. Sit logarithmus numeri $79\frac{15}{32}$ determinandus.

Erit $79\frac{15}{32} = \frac{2543}{32}$, et
log. 2543 = 3, 4053464;
log. 32 = 1, 5051500 ſubtrahendo; erit

log. $79\frac{15}{32}$ = 1, 9001964.

Sit logarithmus numeri decimalis 87, 34 inveniendus. Erit 87, 34 = $\frac{8734}{100}$; et ergo

log. 8734 = 3, 9412132
log. 100 = 2, 0000000, ſubtrahendus; ergo

log. 87,34 = 1, 9412132.

Sit inveniendus logarithmus de 0, 2367,
Quia 0, 2367 = $\frac{2367}{10000}$, et

log. 2367 = 3,3741983
log. 10000 = 4,0000000; ſubtrahendo erit

log. 0,2367 = —0,6258017.

4) Si numero dato fractio adhaereat, et fractio haec mixta jam in puram converſa fuerit, numerator poſthac tamen tabulam excedat, vel major quam 10000 fiat; ſequenti modo proceditur. Differentiae numerorum cum differentiis logarithmorum eorum ut proportionales quantitates ſpectantur, ſequensque proportio inducitur: *Differentia numeri proxime majoris et proxime minoris dato, eſt ad differentiam numeri medii (dati) et proxime minoris, ſicut differentia proxime majoris et proxime minoris logarithmi ad differentiam logarithmi medii et proxime minoris.* Haec differentia logarithmi medii et proxime minoris inventa tum ad proxime minorem logarithmum additur, et hac ratione obtinetur logarithmus numeri dati.

Proportio iſthaec vera quidem non eſt, cum differentiae numerorum nequaquam ad invicem ſint, ut differentiae logarithmorum eorum. Interea tamen haec proportio in numeris, qui ab invicem meris fractionibus differunt, approximationem praxi ſatisfacientem procurrat.

Sit inveniendus logarithmus $4543\frac{17}{49}$.

Si fractio et integra ad eundem denominatorem reducerentur; numerator tunc tabulam ſuperaret.

Verum $4543\frac{17}{49}$ intercedit inter 4543 et 4544.

Hinc, differentia numeri proxime majoris et proxime minoris = 1;

differentia numeri medii et proxime minoris $= \frac{17}{49}$; et

$$\log. 4544 = 3,6574383$$
$$\log. 4543 = 3,6573427; \text{ eorum}$$

differentia $=$ 956.

Igitur $1 : \frac{17}{49} = 956 : x$; et

$$x = \frac{17 \times 956}{49} = 331.$$

Sed $\log. 4543 = 3,6573427$: ergo addendo
$$x = 331$$

erit $\log. 4543\frac{17}{49} = 3,6573758$.

Sit inveniendus logarithmus de 9740,653.

Erit $\log. 9741 = 3,9886035$
$$\log. 9740 = 3,9885590; \text{ et eorum}$$

differentia $=$ 445; ergo

$$1 : \frac{653}{1000} = 445 : \frac{653 \times 445}{1000}; \text{ feu}$$

$$1 : \frac{653}{1000} = 445 : 259. \quad \text{Sed}$$

$\log. 9740 = 3,9885590$; ergo addendo

$\log. 9740,653 = 3,9885869$.

5) Si denique numerus datus major fit quam 10000; is in duos factores diftinguitur ita, ut unus factor quatuor altiffimas notas numeri dati ut integra, et reliquas pro decimalibus contineat, alter tunc vero femper ex 1 et tot zeris conftet, quot ille decimales cyfras habet. Deinde quaeruntur logarithmi horum numerorum duorum,

addunturque, ſumma eorum dat logarithmum numeri dati. Ut:

Sit inveniendus logarithmus numeri 58723.

Erit $58723 = 5872{,}3 \times 10$; et
log. $5873 = 3{,}7688600$
log. $5872 = 3{,}7687860$; eorum

differentia $= 740$; hinc

$$1 : \frac{3}{10} = 740 : \frac{3 \times 740}{10} = 740 : 222.$$

Sed log. $5872 = 3{,}7687860$; addendo

log. $5872{,}3 = 3{,}7688082$; et
log. $10 = 1{,}0000000$; ergo

log. $58723 = 4{,}7688082$.

Ponendo $58723 = 587{,}23 \times 100$, et quaerendo logarithmos horum amborum factorum poſſet etiam logarithmus 58723 inveniri.

Sit inveniendus logarithmus de 2134567,892.

Erit $2134567{,}892 = 2134{,}567892 \times 1000$; et
log. $2135 = 3{,}3293979$
log. $2134 = 3{,}3291944$; eorumque

differentia $= 2035$; ergo

$$1 : \frac{567892}{1000000} = 2035 : \frac{567892 \times 2035}{1000000}$$
$$= 2035 : 1155;$$ ſed

log. $2134 = 3{,}3291944$; addendo erit

log. $2134{,}567892 = 3{,}3293099$; et
log. $1000 = 3{,}0000000$; additis erit

log. $2134567{,}892 = 6{,}3293099$.

Quodsi numerus tabulam excedens in factores distribui queat, qui tabulam amplius non excedant et numeri integri sint; ejus logarithmus multo facilius invenitur, si logarithmi horum factorum addantur. Ut:

Sit inveniendus logarithmus numeri 50769.

Erit 50769 = 5641×9; et
log. 5641 = 3,7513561;
log. 9 = 0,9572425, additis est

log. 50769 = 4,7085986.

Sit inveniendus logarithmus 480000. Erit
480000 = 480×1000; et
log. 480 = 2,6812412
log. 1000 = 3,0000000; additi dant

log. 480000 = 5,6812412.

Vel ponendo 480000 = 48×10000 = 4800×100; etc.

§. 280. *Ope tabulae logarithmorum* pro numeris ab 1 usque ad 10000, *numerum cujusvis logarithmi dati invenire.*

Resolutio. 1) Quodsi logarithmus datus minor 4 integris, ergo in tabula contentus fuerit; ejus numerus (respondens illi) appositus in tabulis habetur.

Sit inveniendus (exscribendus e libello) numerus logarithmi = 3,6880637.

Cum logarithmus datus 3 integra contineat, numerus huic logarithmo respondens 4 notas continere debet, quare inter millia quaerendus erit, inveniturque esse 3,6880637 = log. 4876.

2) **Quando logarithmus datus minor quidem 4 integris eſt, in tabula tamen non ſit contentus; hoc indicio eſt, quod numero huic logarithmo reſpondenti fractio adhaereat.**

Hoc in caſu iterum differentiae logarithmorum cum differentiis numerorum eorumdem tanquam proportionales aſſumendae ſunt. Proportio autem inſtituenda haec eſt: *Ut ſe habet differentia proxime majoris et proxime minoris logarithmi ad differentiam medii et proxime minoris logarithmi, ita ſe habet differentia proxime majoris et proxime minoris numeri, ad differentiam numeri medii et proxime minoris.* Haec differentia (numeri medii vel dati et proxime minoris) ad proxime minorem numerum addita, dat numerum logarithmi dati quaeſitum. Ut:

Sit inveniendus numerus logarithmi hujus: 2,9378624. Hic logarithmus in tabula non reprehenditur. Sed logarithmus proxime major

$= 2{,}9380191$;

proxime minor $= 2{,}9375179 =$ log. 866; et eorum differentia $= 5012$;

medius $= 2{,}9378624$ (ſemper datus)

proxime minor $= 2{,}9375179$; eorum differentia $= 3445$; eſtque

differ. logarithm.

$$5012 : 3445 = 1 : \frac{3445}{5012} = 1 : 0{,}687.$$

Atqui $2{,}9375179 =$ log. 866; hinc

$2{,}9378624 =$ log. 866,687.

3) **Si logarithmus datus major ſit 4 integris; ſpectandus erit tanquam ſumma duorum logarith-**

morum, quorum unus ex tribus integris et omnibus decimalibus (fractionibus. vel mantissa) constat, quas datus contineat, alter vero ex reliquis integris dati. Tum quaeruntur numeri horum duorum logarithmorum, multiplicanturque inter se, ubi numerus logarithmo dato respondens invenitur. V. g.

Sit inveniendus logarithmo: 6,7533532 respondens numerus. Erit

6,7533532 = 3,7533532 + 3,0000000.

Et 3,7533532 = log. 5667,

3,0000000 = log. 1000; ergo

6,7533532 = log. (5667 × 1000) = log. 5667000.

Sit inveniendus respondens numerus logarithmo: 5,7543867. Est

5,7543867 = 3,7543867 + 2,0000000;

proxime major = 3,7544248

proxime minor = 3,7543483 = log. 5680;

eorum differentia = 765. Tum

medius = 3,7543867

prox. min. = 3,7543483; et eorum

differentia = 384; adeoque

$$765 : 384 = 1 : \frac{384}{765} = 1 : 0{,}501.$$

Verum 3,7543483 = log. 5680; igitur

3,7543867 = log. 5680,501; et

2,0000000 = log. 100; quare

5,7543867 = log. (5680,501 × 100) = log. 568050,1.

4) Si denique logarithmus datus sit negativus, hoc indicio est, numerum huic logarithmo respondentem esse fractionem veram, vel minorem unitate. In hoc casu logarithmo dato tot integra adduntur, quot requirantur, ut positivus fiat; tum istius summae numerus respondens quaeritur, dividiturque rursus per 1 cum tot zeris, quot unitates logarithmo negativo fuerint additae. V. g.

Sit logarithmo : —0,1247388 respondens numerus inveniendus. Erit

1,0000000 = log. 10
—0,1247388 = dato; eorum summa est =

0,8752612. Talis in tabula non habetur. Ergo

proxime major = 0,9030900
proxime minor = 0,8450980 = log. 7. Et

eorum differentia = 0,0579920. Porro

medius = 0,8752612
proxime minor = 0,8450980; eorumque

differentia = 0,0301632; ergo

$$579920 : 301532 = 1 : \frac{301532}{579920} = 0,511$$

At 0,8450980 = log. 7; hinc

0,8452612 = log. 7,5; consequenter

$$-0,1247388 = \text{log.} \left(\frac{7,5}{10}\right) = \frac{75}{100} =$$

$$\text{log. } 0,75 = \text{log.} \left(\frac{3}{4}\right).$$

§. 281. Cum $\log.\left(\frac{1}{a}\right) = \log. 1 - \log. a$ $= - \log. a.$

Invenitur ergo etiam numerus $\frac{1}{a}$ respondens logarithmo negativo ($-\log. a$); si unitas per a (numerum ejusdem positivi logarithmi $+ \log. a$) dividatur. Unde esset $- \log. b = \log. 1 - \log. b =$ $\log.\left(\frac{1}{b}\right)$. Consequenter numerus respondens illi logarithmo:

$-0,1247388$ etiam hoc modo inveniri poterit:

proxime major $= 0,3010300$
proxime minor $= 0,0000000 = \log. 1.$

differentia $= 0,3010300.$ Porro

medius $= 0,1247388$
prox. minor $= 0,0000000$; eorumque

differentia $= 0,1247388$; erit ergo

$$3010300 : 1247388 = 1 : \frac{1247388}{3010300} = 1 : 0,419.$$

Atqui $0,0000000 = \log. 1$; itaque
$+ 0,1247388 = \log. 1,419.$ Ergo

$$-0,1247388 = \log.\left(\frac{1}{1,419}\right) = \log.\left(\frac{1000}{1419}\right).$$

§. 282. Quodsi desideretur, ut numerus $\frac{1}{a}$ respondens logarithmo negativo datum denomi-

natorem *ab* quemcunque habeat; hic apprime in eo res consistit, ut fractionis istius $\frac{b}{ab} = \frac{1}{a}$ inveniatur numerator *b*.

$$\text{At log. } b = \text{log. } ab - \text{log. } a.$$

Invenitur ergo logarithmus respondens numeratori fractionis quae datum denominatorem habeat, et numerus dati logarithmi cujuspiam sit; si idem logarithmus positive sumptus a logarithmo denominatoris dati subducatur. V. g.

Sit inveniendus ipsi (—0,1247388) numerus respondens, qui pro denominatore habeat 64. Erit

log. 64 = 1,8061800, et datus positive sumptus = 0,1247388; subductis erit

differ. = 1,6814412 = log. 48.

Idcirco —0,1247388 = —log. 64 + log. 48 $= \text{log. } \left(\frac{48}{64}\right) = \text{log. } \left(\frac{3}{4}\right)$.

§. 283. Invenitur itaque *adjuvante tabula logarithmorum* (ab 1 usque ad 10000):

1) *Quodvis productum*, si logarithmi factorum adduntur, et tum numerus summae eorumdem quaeritur.

2) *Quivis quotiens*, si logarithmus divisoris (denominatoris) a logarithmo dividendi (numeratoris) subducitur, et numerus huic summae respondens quaeritur.

3) *Quaelibet dignitas* numeri dati cujuspiam, si logarithmus numero respondens in exponentem dignitatis ducitur, et numerus huic producto respondens quaeritur.

4) *Quaelibet radix* numeri dati cujuspiam, si logarithmus dato numero respondens per exponentem radicis dividitur, et numerus huic quoto respondens quaeritur.

5) Ope logarithmorum possunt et aequationes resolvi, in quibus quantitas incognita ut exponens potentiae vel radicis occurrat.

Scholion. Loco multiplicationis quantitatum intercedit additio logarithmorum earum, et vice divisionis earum, mera subtractio logarithmorum earumdem; qua ratione ergo in plerisque casibus calculus admodum levatur.

Ceterum, quod doctrina Logarithmorum in Trigonometria et in scientiis ab hac dependentibus necessaria sit, nulla eget probatione.

Caput XII.

Applicatio doctrinae Logarithmorum ad resolvenda nonnulla problemata difficiliora.

§. 284. Invenire ex aequatione $a^x = q$, quantitatem incognitam x.

Resolutio. Log. $(a^x) = \log. q$; seu

$x. \log. a = \log. q$; hinc

$$x = \frac{\log. q}{\log. a}.$$

Invenire x ex aequatione : $\sqrt[x]{a} = q$.

Resolutio. $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$; et

$$\log.\ a^{\frac{1}{x}} = \log.\ q.$$ Ergo

$$\frac{\log.\ a}{x} = \log.\ q;$$ seu

$$\log.\ a = x.\ \log.\ q.$$ Hinc $\frac{\log.\ a}{\log.\ q} = x$.

Extrahere radicem cubicam ex numero $= 2197$.

Resolutio. $\text{Log.}\ \sqrt[3]{(2197)} = \frac{\log.\ 2197}{3}$;

$\log.\ 2197 = 3{,}3418301$, et

$$\frac{3{,}3418301}{3} = 1{,}1139433 = \log.\ 13;$$ inde

$$\sqrt[3]{(2197)} = 13.$$

Invenire ex aequatione $w = aq^{n-1}$ pro termino ultimo progressionis geometricae (§. 261.) etiam q et n.

Resolutio. Ex $aq^{n-1} = w$; erit

$$q^{n-1} = \frac{w}{a};$$ et

$$(n-1)\ \log.\ q = \log.\ w - \log.\ a.$$ Unde

$$\log.\ q = \frac{\log.\ w - \log.\ a}{n-1}.$$ Atque

$$n-1 = \frac{\log. w - \log. a}{\log. q}; \text{ ergo}$$

$$n = 1 + \frac{\log. w - \log. a}{\log. q}.$$

§. 285. *Problema.* Quidam permittit ſocietati cuipiam *a* florenos per *n* annos pro *p* uſuris per 1 centum, ea conditione, ut quovis anno elapſo uſurae iterum Capitali addantur. Ad quot florenos accreſcet Capitale elapſis poſt *n* annis?

Reſolutio. Cum 100 flor. per 1 annum dent (100+p) florenos; dabunt a flor. primo anno $\left(\frac{100+p}{100}\right)$ a florenos. Eſt enim 100 : 100 + p $= a : \left(\frac{100+p}{100}\right) a.$

Hi $\left(\frac{100+q}{100}\right) a$ fl. dant an. 2do $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a$ fl.

Hi $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a$ fl. dant an. 3tio $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a$ flor.

Et hi $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a$ fl. dant an. 4to $\left(\frac{100+p}{100}\right)^4 a$ fl.

Et $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} a$ flor. dant anno nteſimo $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$ flor.

Igitur Capitale per n annos accummulatum

seu $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$ florenis.

Ex hac generali formula poteſt jam ſive n, ſive a, ſive p, ſive x, dum reliqua dantur, inveniri.

Exemplum. 1) Dom. T. dedit mihi aureum ea conditione, ut uſuram annuam (4 flor. pro Centum) ſemper ad capitale augendum conferam. Quot florenos illi mei haeredes elapſis poſt 100 annis ſolvere debebunt?

Reſolutio. $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$ florenis.

Debite ſubſtituendo erit hic $x = \left(\frac{104}{100}\right)^{100} \times$

$\frac{9}{2}$ flor.; et

log. x = (log. 9 — log. 2) + 100 (log. 104 — log. 100).

At log. 9	=	0,9572425
log. 2	=	0,3010300
different.	=	0,6562125 = log. 9 — log. 2.

Log. 104	=	2,0170333
log. 100	=	2,0000000

different. = 0,0170333 = log. 104 — log. 100; et per 100 multiplicata, dat

001,7033300; ſeu 1,7033300 = (log. 104 — log. 100) × 100.

Ergo log. x = 0,6562125 + 1,7033300; ſeu

log. x = 2,3595425.

Logarithmus hic in tabula non habetur. Sed

proxime major = 2,3598355
proxime minor = 2,3579348; eorum

differentia = 18007; et

medius = 2,3595425
prox. minor = 2,3579348 = log. 228;

differentia = 16077; hinc

$18007 : 16077 = 1 : \frac{16077}{18007}$; ergo

$2,3595425 = \log. 228,\frac{16}{18}$ florenis; seu

$x = 228\frac{8}{9}$ flor.

Exemplum. 2) Capitale 1000 flor. usuris datur, 4 flor. usura annua pro 100; quot annis efficiet hoc capitale 40000 flor., si usurae annuae quovis anno Capitali addantur?

Resolutio. $x = \left(\frac{100 + p}{200}\right)^n$ a flor. Debite substitutis erit hic $x = (\frac{104}{100})^n \times 1000 = 40000$; et

$(\frac{104}{100})^n = 40$. Igitur

$n\,(\log. 104 - \log. 100) = \log. 40$; ergo

$$n = \frac{\log. 40}{\log. 104 - \log. 100};$$ seu cum

$\log. 40 = 1,6020600$; et

$\log. 104 - \log. 100 = 0,0170333$:

$$n = \frac{1,6020600}{0,0170333} = 94 \text{ annis.}$$

§. 286. *Problema.* Cajus deponit a florenos usuris dandos erga censum annuum 4 flor. pro 100,

communis exponens ſeu $q = \frac{100+p}{100}$, primus terminus ſeu $a = b$; erit hic debite ſubſtituendo valores, ſumma omnium terminorum, ſeu

$$S = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{1} \times \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} b - b}{\frac{100+p}{100} - 1}, \text{ ſeu}$$

$$S = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} b - b}{\frac{100+p-100}{100}} = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} b - b.}{p : 100}$$

$$S = \left(\frac{(100+p)^{n}}{(100)^{n}} b - b\right) \times \frac{100}{p}. \text{ Seu}$$

$$S = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} \times \frac{100b}{p} - \frac{100.b}{p}.$$

Igitur Capitale elapſis n poſt annis auctum ſeu $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} \times \frac{100.b}{p} - \frac{100.b}{p}$; etc.

Ex hac generali formula poteſt jam inveniri ſive x, ſive p, ſive a, ſive b, ſive n, dummodo reliqua dentur.

Exemplum. 1) Proponatur hoc *Problema:* Quot annis accreſcet Capitale 5 florenorum erga cenſum 4 flor. pro 100 uſuris datum, uſque ad 10000 florenos, ſi praeter cenſum adhuc annue floreni Capitali addantur.

Resolutio. Hic est $a = 5$ flor. | n quaeritur.
$p = 4$
$b = 8$
$x = 10000$

$$\text{Cum } x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a + \frac{100.b}{p}\right) - \frac{100.b}{p},$$

fit; erit hic rite substitutis valoribus:

$10000 = (\frac{104}{100})^n (5 + \frac{800}{4}) - \frac{800}{4}$; seu

$10000 = (\frac{104}{100})^n (5 + 200) - 200$; et

$10200 = (\frac{104}{100})^n \times 205$; ergo

$\frac{10200}{205} = (\frac{104}{100})^n$. Itaque

log. 10200 — log. 205 = n (log. 104 — log. 100), et

$$\text{inde } n = \frac{\text{log. } 10200 - \text{log. } 205}{\text{log. } 104 - \text{log. } 100}.$$ Est autem

log. 205 = 2,3117539; et

log. 10200 = log. (102 × 100) = log. 102 + log. 100;

log. 102 = 2,0086002

log. 100 = 2,0000000

log. 10200 = 4,0086002. Tum

log. 104 — log. 100 = 0,0170333: ergo

$$n = \frac{4.0086002 - 2.3117539}{0,0170333} = 99,61 \text{ (ann.)}$$

$n = 99$ ann. 7 mens. 13 diebus.

Exemplum. 2) Sit $a = 200$; $b = 16$; $p = 4$; erit

$$x = \left(\frac{104}{100}\right)^n \left(200 + \frac{100 \times 16}{4}\right) - \frac{100 \times 16}{4}; \text{ seu}$$

communis exponens seu $q = \frac{100+p}{100}$, primus terminus seu $a = b$; erit hic debite substituendo valores, summa omnium terminorum, seu

$$S = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{1} \times \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} b - b}{\frac{100+p}{100} - 1}, \text{ seu}$$

$$S = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} b - b}{\frac{100+p-100}{100}} = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} b - b.}{p : 100}$$

$$S = \left(\frac{(100+p)^{n}}{(100)^{n}} b - b\right) \times \frac{100}{p}. \text{ Seu}$$

$$S = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} \times \frac{100b}{p} - \frac{100.b}{p}.$$

Igitur Capitale elapsis x post annis auctum seu $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} \times \frac{100.b}{p} - \frac{100.b}{p}$; etc.

Ex hac generali formula potest jam inveniri sive x, sive p, sive a, sive b, sive n, dummodo reliqua dentur.

Exemplum. 1) Proponatur hoc *Problema:* Quot annis accrescet Capitale 5 florenorum erga censum 4 flor. pro 100, usuris datum, usque ad 10000 florenos, si praeter censum adhuc annue 8 floreni Capitali addantur.

Resolutio. Hic est a = 5 flor. | p = 4 | b = 8 | x = 10000 | n quaeritur.

Cum $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a + \frac{100.b}{p}\right) - \frac{100.b}{p}$, sit; erit hic rite substitutis valoribus:

$10000 = (\frac{104}{100})^n (5 + \frac{800}{4}) - \frac{800}{4}$; seu

$10000 = (\frac{104}{100})^n (5 + 200) - 200$; et

$10200 = (\frac{104}{100})^n \times 205$; ergo

$\frac{10200}{205} = (\frac{104}{100})^n$. Itaque

log. 10200 — log. 205 = n (log. 104 — log. 100), et

inde $n = \frac{\text{log. } 10200 - \text{log. } 205}{\text{log. } 104 - \text{log. } 100}$. Est autem

log. 205 = 2,3117539; et

log. 10200 = log. (102 × 100) = log. 102 + log. 100;

log. 102 = 2,0086002

log. 100 = 2,0000000

log. 10200 = 4,0086002. Tum

log. 104 — log. 100 = 0,0170333: ergo

$n = \frac{4.0086002 - 2.3117539}{0,0170333} = 99{,}61$ (ann.)

$n = 99$ ann. 7 mens. 13 diebus.

Exemplum. 2) Sit $a = 200$; $b = 16$; $p = 4$; erit

$x = \left(\frac{104}{100}\right)^n \left(200 + \frac{100 \times 16}{4}\right) - \frac{100 \times 16}{4}$; seu

$x = (\frac{104}{100})^n (200 + 400) - 400$. Ponamus jam $x = 100000$ florenis. Erit quaerendo n:

$$\frac{100000+400}{600} = \left(\frac{104}{100}\right)^n \text{; et}$$

$\frac{100400}{600} = (\frac{104}{100})^n$. Et

$\frac{1004}{6} = (\frac{104}{100})^n$. Ergo

log. 1004 — log. 6 $= n$ (log. 104 — log. 100); et

$$\frac{\text{log. } 1004 - \text{log. } 6}{\text{log. } 104 - \text{log. } 100} = n \text{. Seu}$$

$$\frac{2,2235824}{0,0170333} = n = 130 \text{ an.} + \frac{92534}{170333}.$$

§. 287. *Coroll.* Quodſi annue loco addendorum b florenorum, b floreni auferantur: tum b contrariam deſignationem obtinet, atque aequatio

$$x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a + \frac{100.b}{p}\right) = \frac{100.b}{p}$$

transformatur in ſequentem:

$$\text{Incognita } x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a - \frac{100.b}{p}\right) + \frac{100.b}{p}.$$

In hoc caſu capitale aut creſcet aut decreſcet, prout nempe uſurae annuae majores vel minores ſumptibus annuis fuerint.

Exemplum. Cajus habet Capitale 10000 flor. erga cenſum 4 flor. pro 100 exſtans; facit autem Cajus annue ſumptum 600 flor, Quot annis jam nihilum habebit?

Resolutio. Quia $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a - \frac{100b}{p}\right)$ $+ \frac{100.b}{p}$; erit hic rite substitutis valoribus:

$x = o = (\frac{104}{100})^n (10000 - \frac{60000}{4}) + \frac{60000}{4}$;

$O = (\frac{104}{100})^n (10000 - 15000) + 15000$; seu

$O = (\frac{104}{100})^n (-5000) + 15000$; et

$5000 (\frac{104}{100})^n = 15000$, seu

$(\frac{104}{100})^n = \frac{15000}{5000} = \frac{15}{5} = 3$. Ergo

$n(\log. 104 - \log. 100) = \log. 3$; inde

$$n = \frac{\log. 3}{\log. 104 - \log. 100};\ \text{seu}$$

$$n = \frac{0,4771212}{0,0170333} = 28,02\ (\text{ann.}).$$

§. 288. Cajus elapsis n post annis a florenos accipiendos habet; hos vendit numatione (pro numerata pecunia) erga censum p flor. pro 100, id est, pro $(100+p)$ florenis, quos 1 anno serius accipiendos habet, semper tantum 100 flor, percipit. Quaeritur, quantum pro illis a florenis nunc solvendum sit? x floreni.

Resolutio. Cum pro $(100 + p)$ florenis 1 anno citius anticipatis (anticipando) tantum 100 flor. solvantur; valent a floreni 1 ann. citius anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^1 a$ florenos; nam

$$(100+p) : 100 = a : \left(\frac{100}{100+p}\right) a\ \text{flor.}$$

Porro hi $\left(\frac{100}{120+p}\right) a$ floreni valent 1 an. ci

tius anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$ fl.; nam

$(100+p):100 = \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a : \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$. florenos.

Hi $\left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a$ floreni 1 ann. anticipati valent tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a$ florenos; nam

$(100+p):100 = \left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a : \left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a$ floren.

Igitur a flor. valent anticipati

1 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^1 a$ florenos.

a floreni 2 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$ fl.

a flor. 3 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a$ flor.

a flor. 4 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a$ flor.

a flor. 5 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^5 a$ flor.

Et ideo a floreni n annis citius anticipati valent tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$ florenos.

Erit hic rursus $x = \left(\frac{100}{100+p}\right)^n \times a$ flor.; et

1) $\text{Log.}\, x = \log. a + n[\log. 105 - \log.(100+p)]$
2) $\text{Log.}\, a = \log. x - n[\log. 100 - \log.(100+p)]$
2) $\text{Log.}\, n = \dfrac{\log. x - \log. a}{\log. 100 - \log.(100+p)}$. Ubi

ergo ſive x, ſive a, ſive n, ſive p inveniri poterit, ſi reliqua dantur.

Exemplum. Cajus accepturus eſt 100000 florenos elapſis poſt 10 annis; hos vendit erga deductum 8 flor, a 100 (deducendis 8 fl. a quovis 100). Quantum obvenit in numatione illi deductis deducendis? Reſponſ. 4 floreni.

Reſolutio. Cum $x = \left(\dfrac{100}{100+p}\right)^n a$ flor.; erit hic ſubſtituendo valores:

$$x = \left(\frac{100}{108}\right)^{10} \times 100000\text{; et}$$

$\log. x = \log. 100000 + 10(\log. 100 - \log. 108)$.
Sed $\log. 100 = 2,0000000$
$\log. 108 = 2,0334238$, ſubtrah.:

$\log. 100 - \log. 108 = -0,0334238$; ergo
$10(\log. 100 - \log. 108) = -0,3342380$; et
$\log. 100000 = 5,0000000$; hinc addend.

$\log. x = 4,6657620$.
Verum $4,6657620 = 3,6657620 + 1,0000000$;
et $\log. 4632 = 3,6657620$;
$\log. 10 = 1,0000000$. Quare
$4,6657620 = \log.(4632 \times 10) = \log. 46320$;
et $x = 46320$ florenis.

Scholion. Inventum erat in praecedenti problemate, quod 100000 floreni deductis deducendis 8 florenis a 100, ad 10 annos anticipati tantum dent 46320 florenos. Id comprobari potest per problema §. 285. Nam si acquirendi essent 100000 floreni decem annis; deberent 46320 floreni usurae dari ita, ut census annui semper iterum Capitali adderentur, et census 8 flor. pro 100 efficeret.

Est enim in $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ *a* flor. (§. 285.)

substituendo; hic $x = \left(\frac{108}{100}\right)^{10} \times 46320.$

Ergo log. x = 10 (log. 1'08 — log. 100) + log. 46320; et 10 (log. 108—log. 100) = 0,3342380
log. 46320 = 4,6657620

log. x = 5,0000000.
5,0000000 = log. 100000; ergo
x = 100000 florenis.

§. 289. Cujus pro n annis annuum quaestum (tributum) *a* florenorum suo usui habet. Hunc vendit pro numatione deducendis p flor. a 100. Quantum anticipando pro hoc toto quaestu modo solvendum venit. x floreni.

Resolutio. Cum *a* floreni elapso 1 anno percipiendi, nunc anticipati tantum dent $\left(\frac{100}{100+p}\right) a$ floren.:

Illi, qui elapto 2 ann. percipiendi sunt, anticipati tantum dabunt $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$ florenos;

elapſo 3 an. percipiendi: nunc anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^{3} a$ florenos; et itaque elapſis n annis percipiendi, nunc anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n} a$ florenos dabunt. Erit ergo $x =$

$$\left(\frac{100}{100+p}\right)^{1} a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^{2} a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^{3} a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^{4} a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^{5} a + \cdots\cdots + \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n} a.$$

Igitur x aequale Summae omnium terminorum progreſſionis geometricae n terminos habentis, cujus terminus primus $\left(\frac{100}{100+p}\right)^{1} a$; terminus ultimus $= \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n} a$; et communis exponens $= \frac{100}{100+p}$.

At (§. 259.) $S = \frac{qw - a}{q - n}$; ſubſtituendo erit

$$x = \left[\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n} \times \left(\frac{100}{100+p}\right) - \left(\frac{100}{100+p}\right) a\right] : \left(\frac{100}{100+p} - 1\right)$$

ſeu additis exponentibus in numeratore, et reducendo in denominatore omnia ad eundem denominatorem, erit

$$x = \left[\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} a - \left(\frac{100}{100+p}\right) a\right] :$$

$$\left(\frac{100-100-p}{100+p}\right);$$

$$x = \left[\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} a - \left(\frac{100}{100+p}\right) a\right] :$$

$\left(\frac{-p}{100+p}\right)$; et multiplicando per inverſum denominatorem, tum dividendo quemvis terminum ſingulatim, et praeponendo poſitivum eſt:

$$x = \frac{\left[\left(100+p\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} a\right]}{-p} - \frac{\left(100+p\right)\left(\frac{100}{100+p}\right) a}{-p}$$

ſeu

$$x = \frac{100.a}{p} - \left(\frac{100+p}{p}\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} a.$$

Datis reliquis invenitur x, ſive a, ſive p, ſive n.

Exemplum. Emit quidam quaeſtum annuum (vel penſionem, tributum, vectigal etc.) 20000 florenorum ad 10 annos numerata pecunia, deducendis 4 flor. a 100. Quantum erit pro hoc toto quaeſtu deductis deducendis ſolvendum?

Resolutio. $x = \frac{100.a}{p} - \left(\frac{100+p}{p}\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} a;$
substitutis valoribus erit hic:

$$x = \frac{20000.100}{4} - \left(\frac{104}{4}\right)\left(\frac{100}{104}\right)^{11} \times 20000.$$

$$\text{Ergo } x = 500000 - (26)\left(\frac{100}{104}\right)^{11} \times 20000;$$

$$\text{seu } x = 500000 - \left(\frac{100}{104}\right)^{11} \times 520000. \text{ Verum}$$

log. 100 — log. 104 = — 0,0170333; ergo
11 (log. 100 — log. 104) = — 0,1873663;
log. 520000 = 5,7160033, additis

log. 520000 + 11 (log. 100 — log. 104) = 5,5286370
5,5286370 = 3,5286370 + 2,0000000
3,5286370 = log. 3378
2,0000000 = log. 100; hinc
5,5286370 = log. 337800. Et igitur
x = 500000 — 337800 = 162200 flor.

Scholion. 20000 × 10 = 200000. Et
200000 — 162200 = deductui ablato
= 37800 flor.

Caput XIII.

De Combinationibus.

§. 290. *Combinatio* est methodus inveniendi omnes conjunctiones possibiles, diversas simul plurium rerum, quae binae aut binae, ternae aut ternae, quatuor et quatuor etc. simul accipiuntur, sine aut cum respectu ad diversitatem etiam

loci, quem res combinatae occupare possunt. quod a Problemate dato dependet.

§. 291. *Problema.* Invenire numerum Combinationum, quae fieri possunt cum 24 Alphabeti litteris 2 et 2, 3 et 3, et ita porro 24 et 24 simul accipiendo.

Resolutio et Demonstratio. Combinatum *a* secum ipso dat *aa*, combinatum cum *b* dat *ab*, cum *c* dat *ac* etc.. ergo erunt 24 combinationes litterae *a*. Eadem methodo littera *b* dat 24 combinationes. et ita operando cum reliquis advertitur, quod littera quaelibet primo loco posita 24 diversis vicibes cum reliquis combinari possit; dabunt ergo omnes 24 simul binarum combinationes diversas 24×24 seu 576.

Si jam Combinationes trium accipiantur, hoc est, ad quamlibet priorem adjungatur *a*, erit prima *aaa*, secunda *aab*, tertia *aac* etc., ergo solum *a* dabit 24×24 seu 576 novas trium litterarum combinationes: quod de *a* demonstratur, de omnibus 24 litteris, ergo de *b*, *c*, *d* etc. dici potest, quaelibet enim 576 seu (24×24) novas combinationes trium litterarum dabit, unde facile concluditur, combinationes omnes seu voces trium litterarum fore 576×24 seu $(24 \times 24) \times 24$ hoc est 13824.

Si quatuor litterae conjungantur; fit ut prius; *a* prioribus adjunctum dat novas 13824 quatuor litterarum combinationes; idem cum omnibus 24 litteris contingit, combinationes ergo quatuor litterarum sunt 13824×24.

His jam praemissis advertitur; quod ulteriores combinationes semper obtineantur multiplicando summam praecedentium combinationum per 24. Constituunt itaque combinationes progressionem geometricam, in qua primus terminus est 576 combinatio duarum, trium secundus, quatuor tertius, et ultimus denique combinatio viginti trium; communis exponens vero 24, et numerus terminorum seu $n = 23$, qui unitate minor esse debet, quam numerus litterarum. Facile jam erit ex formulis praecedentibus (§. 256. Cor. 2. et §. 260.) invenire terminum ultimum et demum summam omnium. Nempe ultimus terminus $aq^{n-1} = 576 \times 24^{22}$. Summa omnium terminorum seu

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{576 \times 24^{23} - 576}{23}, \text{ seu}$$

$$S = \frac{(24 \times 24) \times 24^{23} - 576}{23} = \frac{24^{25} - 576}{23}.$$

Coroll. 1) Quodsi etiam litterae singulae accipiantur, sine aliis, seu, *a*, *b*, *c*, etc. solitarie etiam ponantur; erit terminus primus $a = 24$; et secundus seu $aq = 24^2$, et tota summa seu

$$S = \frac{24 \times 24^{24} - 24}{23}, \text{ seu } S = \frac{24^{25} - 24}{23}.$$

Coroll. 2) Quodsi numerus pauciorum combinationum desideraretur; cessandum erit in eo termino, qui datas combinationes indicat. Ita numerus combinationum 2 et 2, 3 et 3, 4 et 4, 5 et 5, 6 et 6 simul accipiendo, cum haec combinatio quintum terminum det, erit aq^4.

§. 292. *Problema.* Invenire numerum combinationum, dum certus tantum numerus quantitatum ſumitur, et quaevis toties ad primum locum ponitur, quot quantitates ſumuntur.

Reſolutio et Demonſtratio. Combinando a et b binos et binos dat 4 combinationes, ſeu potentiam ſecundam numeri quantitatum combinandarum;

aa	bb
ab	ba

a, b, c binae et binae ſumptae dant 9 combinationes, vel rurſus ſecundam potentiam numeri quantitatum combinandarum;

aa	bb	cc
ab	ba	ca
ac	bc	cb

a, b, c, d, dant 16 combinationes etc. Ergo combinatio petita oſtendit potentiam ad quam numerus quantitatum combinandarum elevatur.

Ergo a, b, c, terni comparati dant 27 combinationes, hoc eſt tertiam potentiam numeri (3) combinandarum quantitatum. a, b; c, d, terni combinati dant tertiam potentiam numeri 4; etc. Sit ergo numerus quantitatum $= m$, combinatio petita $= n$; erit numerus combinationum quaeſitus $= m^n$.

Si e. g. quantitatum 6 quaternarii petuntur; erunt hi $= 6^4 = 1296$. Sint quantitates 9; erunt earum quaternarii $= 9^4 = 6561$. Si quantitates 100, combinatio ternariorum, erit numerus combinationum $= 100^3 = 1000000$.

§. 293. *Problema.* Invenire numerum variationum localium (permutationum) quantitatum determinatarum.

Resolutio et Demonstratio. *a* et *b* duas: *ab*, *ba*, admittit; *a*, *b*, *c* sex: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, admittit, hoc est priores variationes 2 cum numero novo quantitatum 3 multiplicatae; *a*, *b*, *c*, *d*, admittit 24 variationes, hoc est priores 6 multiplicatae per novas 4; *a*, *b*, *c*, *d*, *e* admittit 120 variationes, hoc est 24 priores ductae in novas 5. Sequitur jam ex his, ut habeantur subsequae variationes, priores semper per numerum sequentem esse multiplicandas.

Generatim igitur ut habeatur numerus variationum, quas habere potest quiscunque numerus datus, scribatur progressio arithmetica, et infra illam producta, methodo superius exposita: V. g.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10; etc.
1,	2,	6,	24,	120,	720,	5040,	40320,	362880,	3628800; etc.

Seu ita scribendo:

1	2	3	4	5
1	1×2	$1\times2\times3$	$1\times2\times3\times4$	$1\times2\times3\times4\times5$
1	2	6	24	120

6	etc.
$1\times2\times3\times4\times5\times6$	etc.
720	etc.

Ergo generaliter numerus permutationum localium $= N$ determinatarum (n) quantitatum erit $= 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10 \cdots \times n$.

Exemplum. Quaeritur, quoties 8 personae tabulae assidentes mutari possint. Accipiatur productum

infra 8 positum, et habebuntur 40420; vel sumatur productum ex octo primis numeris naturali serie crescentibus N = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. = 40320.

§. 264. *Problema.* Invenire numerum combinationum, reipsa differentium, et dum nulla secum ipsa comparatur: V. g. 6 numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Resolutio et Demonstratio. 1 comparata cum reliquis dat 5 combinationes binariorum, scilicet: 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6; 2 comparatus cum reliquis dat 4, cum 1 enim jam comparata est, fiuntque 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6; 3 comparatus cum reliquis dat 3, cum 1 enim et 2 jam comparatus est, et fiunt 3, 4 | 3, 5 | 3, 6; 4 dat 2 nempe 4, 5 | 4, 6; 5 dat 1, nempe 5, 6. Ergo combinationes binariorum constituunt progressionem arithmeticum 5, 4, 3, 2, 1, ubi maximus terminus est 5, et minimus 1, numerus terminorum = 5, cujus summa habetur ex formula (§. 200.) $S = (a + w)\frac{n}{2}$; hoc est $S = (5 + 1)\frac{5}{2}$. Sed $(5+1)\frac{5}{2} = \frac{6.5}{2} = \frac{5 \times 6}{1 \times 2}$ hoc est: ultimi duo termini dati inter se multiplicati et per primos duos divisi.

1) Ergo Summa binariorum habetur, si quorumcunque numerorum datorum ultimi duo multiplicentur, et per factum primorum duorum dividantur. Id est, si quantitatum combinandarum numerus accipiatur generaliter = *m*, erunt combinationes binariorum $= \frac{m(m-1)}{1.2}$.

2) Ergo terni seu combinatio trium habebitur, si tres ultimi inter se multiplicentur, et per factum primorum trium dividantur, ergo combinationes ternariorum erunt $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$.

Combinatio quatuor numerorum habebitur, si quatuor ultimi multiplicentur, et per factum quatuor primorum dividantur. Erunt ergo combinationes quaternariorum =

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

Et Combinationes quinariorum =

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

Igitur combinationes n numerorum erunt:

$$N = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ \text{-----}\ [m-(n-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \text{------------}\ n.};$$

ubi autem $n < m$ esse debet.

Coroll. 1) Si haec conferantur cum iis, quae dicta sunt de elevatione ad potentias, videbimus, quod haec producta eadem omnino sint cum coefficientibus potentiarum incipiendo a tertio termino. Igitur combinationes numerorum m aequantur coefficientibus potentiae $(a+b)^m$ incipiendo a tertio termino. (Quod in theoremate binomiali demonstratur).

Coroll. 2) Quodsi igitur 90 Numeri combinandi fuerint; erunt numerorum combinationes binariorum (quae vulgo *ambi* vocantur) $\frac{90 \times 89}{1.\ 2.}$ $= 4005$; combinationes *trium* $\frac{90 \times 89 \times 88}{1.\ 2.\ 3.} =$ 117480; combinationes *quatuor* numerorum sunt $\frac{90 \times 89 \times 88 \times 87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190$. Combinationes *quinariorum* erunt $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5.}$ 43949268.

Typis Feichtingerianis.

Corrigenda.

Pag.	*Lin.*	*Errata.*	*Corrige.*
26.	14.	Summi	Sumi
48.	1.	$a : n = q$	*Si* $a : n = q$
49.	1.	et loco n	et *r* loco *n*
52.	22.	$4 \times 3 \times$	$4 \times 3 =$
55.	ultim.	earum	eorum
83.	11.	ax	ex
85.	22.	operat,	operatur
100.	8.	$a - a = a$	$a - a = 0$
100.	31.	$\times 42a$	$= 42a$
109.	23.	divitur	dividitur
111.	16.	dictur	dicitur
112.	19.	$3 + 2$	3×2
115.	24.	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$
122.	11.	$\times b \times dbq$	$\times b = dbq$
123.	5.	hanc	hunc
141.	3.	$\sqrt[4]{a^5}$	$\sqrt[6]{a^4}$
143.	ult.	$\sqrt[2]{7^2}$	$\sqrt[2]{7}$
150.	22.	444	144
155.	ult,	quadratum	quadratam
164.	18.	hoc	,ſi hoc
177.	12.	$\frac{3}{10000}$	$\frac{4}{10000}$
190.	3.	ſecundum	ſecundorum
195. 97.	7. 22.	operatur	operator
232.	7.	et	ut
261.	23.	$q - b$	$(q - b) : (a - b)$
262.	9.	$x \times$	$x =$

etiam qualitas quoti spectatur. Quare quantitates homogeneae rationem veram constituunt.

In comparatione duarum rationum non tam spectanda venit qualitas quoti, quam potius quantitas ejusdem. Est enim proportio aequalitas duarum rationum. Duae rationes autem sunt aequales, quae aequalem quotum (quoad quantitatem, vel numerum unitatum) habent; ergo omnes rationes constituunt proportionem, quae aequalem quotum, vel eundem habent exponentem. Possunt itaque duae rationes sibi tamen aequari, licet quoti non sint ejusdem qualitatis, vel dissimiles. Ita 100 floreni: 36000 florenos = 100 librae: 36000 libras. Vel 1 ℔ : 2 ℔ = 5 flor. : 10 fl. Vel 1 ℔ : 4 fl. = 2 ℔ : 20 fl.; erunt verae proportiones, quia $\frac{100}{36000} = \frac{100}{36000}$, et $2 \times 5 = 10 \times 1$; licet 10 ℔ nunquam 10 florenis aequentur

Verum in determinando facto, et quoto, vel in investiganda qualitate quanti bene advertendum est ad ea, quae de multiplicando et dividendo dicta erant (§. 28. et 34. Arith. Elem.), qui semper qualitatem facti et quoti determinant, cum inter se semper homogenei esse debeant. Hinc nihilominus tamen, spectata qualitate multiplicandi, erit in propotione 1 ℔ : 2 ℔ = 5 fl. : 10 fl.: factum extremorum 1 ℔ × 10 fl. = 2 ℔ × 5 fl. id est 10 ℔ = 10 ℔, vel
10 fl. = 10 fl. prout nempe multiplicandus fuerit, vel ℔ id est librae, vel floreni.

Quantitates vero, quas inter se comparamus, ut earum ratio, id est quantitas quoti inveniatur, pervariae esse, et nequaquam omnes induci possunt. Res ejusdem nominis, librae, et librae, semiunciae

et femiunciae, homines et homines, vires et vires, merces et merces, floreni et floreni, cruciferi et cruciferi, pondera et pondera, pretia et pretia, celeritates et celeritates, maffa et maffa, fpatia et fpatia, tempora et tempora, et pluria alia, funt quantitates homogeneae.

Ex rationibus fimplicibus compofitam fieri et poffe et debere, probatum erat. Hoc pacto diverfae res in unam rationem reducuntur, quae fingulae fub hac non videntur effe. Omnes fcientiae (doctrinae), quae Algebra utuntur, hac in re teftantur. Ita in *Statica* affirmatur: quanto major celeritas, et quo longius tempus, tanto majus fpatium, et vice verfa. Tum quo denfius et magis voluminofum corpus fuerit, eo gravius erit, et id genus plura,

§. 228. *Coroll.* 1) Cum itaque quantitates homogeneas duntaxat comparare, et in rationem conjungere liceat; non erit difficile in applicatione (vel praxi) rationem exprimire. Et cum primum duae adfunt rationes; tum inquiritur earum aequalitas, quae in quoto perfacile invenienda eft. Haec aequalitas autem duarum rationum dat proportionem, et ex hac poteft terminus quivis inveniri.

§. 229. *Coroll.* 2) Quodfi in problemate quopiam plures obveniant rationes, quam duae: hoc indicio erit: rationes has in unam componi poffe et debere, ubi quantitates cum producto ex aliis in ratione ftent.

Inter plures rationes unius ejusdemque problematis duae duntaxat funt rationes principales,

in quibus aequalitas verſatur. Haec tunc primum restituitur, ſi rationes ſimplices in compoſitam rationem reductae fuerint. Indagatio et determinatio, quae hae duae rationes principales ſint, et quae tantum reſpectum unius earum habeant, intellectum poſtulat. Iudicium (facultas dijudicandi) ſanum plus itaque praeſtabit, quam multis regulis praeſtari poteſt. Ad intelligendam (perſpiciendam) rationem compoſitam praeterea ſaepe variae praeſcientiae (notiones) requiruntur; verum tunc regulae Algebrae tantum applicantur, neutiquam autem novae eduntur. Ita Algebraiſta valde erraret; ſi in motu uniformi accelerato ſupputaturus foret: ſpatia eſſe, ut tempora. Nam ibi demonſtratur: ſpatia eſſe, ut quadrata temporum etc. Quo itaque aequalitatem inter duas vel plures rationes intelligas, et rite exprimas, facultates neceſſarias, ergo Theoriam et Praxim conſocies, igitur praeter regulas Algebrae etiam has ſcientiae illius, quam problema datum ſpectat, teneas neceſſe eſt. Algebram ergo in ſe non tam difficile eſt ediſcere, quam potius ejus uſus et applicatio valde extenſa ſunt.

§. 230. *Ratio aequalitatis* eſt, dum antecedens et conſequens aequales ſeu eaedem quantitates ſunt, ut $a : a$ vel $5 : 5$. Ratio *dupla* eſt, dum antecedens bis continet conſequentem, ſeu dum quotus vel exponens eſt 2, ut $6 : 3$, et $16 : 8$. *Tripla*, dum ter, ut $6 : 2$. *Quadrupla*, dum quater. ut $20 : 5$ etc. Ratio *ſubdupla, ſubtripla* etc. eſt, dum antecedens bis, ter etc. continetur in ſuo conſequente, ut $3 : 6$, et $4 : 20$ etc. *Seſqui altera* dicitur, dum antecedens ſemel plus dimidia parte

continet consequentem, ut $6:4$. *Sesqui tertia*, si quotus est $1\frac{1}{3}$; *sesqui quinta*, si quotus est $1\frac{1}{5}$ etc.

Ratio duplicata nihil aliud est, quam ex duabus aequalibus composita, vel cujus exponens quadratum exponentis rationis simplicis est. V. gr.

Sint $2:4$, et
$3:6$, rationes simplices, (2) earum exponens;

erit $6:24$, ratio duplicata, et $4=2\times2$, ejus exponens; ergo quadratum prioris.

Ratio duplicata aequalis est quadrato cujusvis simplicium. Est enim composita ex aequalibus duabus rationibus, ergo aequatur quadrato cujusvis simplicium (§. 211.). Ergo erit $2^2:4^2=3^2:6^2$; et $6:24=4:16=9:36=4$.

Ratio triplicata est composita ex tribus aequalibus, et ejus exponens est cubus exponentis simplicis. V. g. sint simplices $2:4$, et
$3:6$
$4:8$; erit

composita vel triplicata $24:192=8=2^3$;
ergo = cubo prioris,

Ratio triplicata semper etiam est aequalis cubo rationis cujusvis simplicium (§. 211.). Vel $24:192=2^3:4^3=3^3:6^3=4^3:8^3$.

Ratio subduplicata est, radix quadrata ex antecedente ad radicem quadratam ex consequente rationis duplicatae, et semper aequalis cuivis simplicium. Ut $\sqrt{6}:\sqrt{24}=\sqrt{4}:\sqrt{16}=\sqrt{9}:\sqrt{36}=2:4=3:6$ (§. 211.).

Ratio subtriplicata est radix cubica ex antecedente ad radicem cubicam ex consequente rationis triplicatae, semperque aequalis cuivis simplicium. Ut $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{2^3} : \sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{3^3} : \sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{4^3} : \sqrt[3]{8^3} = 2 : 4 = 3 : 6 = 4 : 8$ (§. 211.).

§. 231. Si in ratione geometrica duarum quantitatum exponens est numerus integer, vel fractio accurate determinandi numeratoris et denominatoris; tum dicitur *ratio rationalis*, quantitates ipsae dicuntur *rationales*, vel *commensurabiles*, et exponens dicitur *numerus rationalis*. Si e contrario exponens neque integer numerus, neque fractio determinati numeratoris et denominatoris est; tunc dicitur ille numerus *irrationalis*, ratio, *ratio irrationalis*, et quantitates dicuntur *irrationales*, vel *incommensurabiles*.

Coroll. 1) Ergo omnes radices potentiarum imperfectarum sunt numeri irrationales, et si itaque ejusmodi radix exponens rationis cujuspiam sit; haec erit ratio irrationalis, et quantitates, quae in tali ratione stant, erunt quantitates irrationales, E. g.: si $a = b\sqrt{2}$; erit ratio $a : b$ irrationalis, et a, b erunt quantitates irrationales.

Coroll. 2) De duabus quantitatibus irrationalibus ergo nulla alteram exacte metitur (§. 204. Coroll. 4.), et ideo hoc ipso incommensurabiles audiunt.

Coroll. 3) Rationes inter numeros irrationales possunt rationales esse; ut $2\sqrt{3} : 7\sqrt{3} = 2 : 7$.

Omnes rationes rationales autem possunt per numeros integros exprimi; $\sqrt[2]{36}:\sqrt[2]{4}=6:2$. Irrationales rationes propemodum per rationales exprimi possunt per approximationem.

§. 232. Rationes aequales jam, inter se invicem comparando, vel *directae*, vel *inversae*, id est, reciprocae sunt. Rationes dicuntur *directae*, quarum antecedentes majores, vel minores sunt consequentibus, ut $a:aq=b:bq$, vel $aq:a=bq:b$; hoc est, si in prima ratione ita sit primus ad 2dum, ut in altera itidem primus ad 2dum.

Rationes dicuntur *inversae*, vel *reciprocae*, si antecedens primae sit major suo consequente, et antecedens secundae minor suo consequente; vel primus minor, et secundus major; hoc est, si sit 1mus ad 2dum in prima, ut 2dus ad 1mum in altera. Ut 3:15 est reciproce ut 10:2.

Facile colligitur, solas rationes directas constituere proportionem veram: hanc ergo divisionem rationum tantum propter faciliorem inventionem ordinis terminorum proportionis cujuspiam, et propter eorum denominationem a mathetis factam esse. Ita si fuerit $\frac{a}{q}:\frac{b}{q}=n$; erit

$n=aq:bq=a:b$; igitur

$\frac{a}{q}:\frac{b}{q}=a:b$. Unde affirmatur: fractiones ejusdem denominatoris sunt in ratione directa cum suis numeratoribus, vel habent se directe, ut numeratores sui.

Et quia $\frac{a}{p} : \frac{a}{q} = aq : ap = q : p$; hinc dicitur: fractiones habentes aequales numeratores ſtant in ratione inverſa cum ſuis denominatoribus, vel habent ſe reciproce, ut denominatores ſui.

Porro quia $\frac{a}{n} : \frac{b}{r} = ar : bn$; hinc affirmatur: duo quoti homogenei ſunt in ratione compoſita directa numeratorum, et inverſa denominatorum. Denique quia ex aequatione: $\frac{a}{n} = \frac{b}{r}$, ſequens proportio fit, $a:b = n:r$; hinc affirmatur, ſi duo quoti quantitatum homogenearum aequales ſint; eſſe dividendos in directa ratione cum diviſoribus etc.

§. 233. *Theorema.* Quatuor quantitates numeratae ſunt in proportione geometrica, ſi numeri illis praefixi proportionem conſtituant, id eſt, ſi $m:n = r:x$; erit $ma:na = rb:xb$, V. gr. ſi fuerit $4:7 = 12:x$; erit etiam 4 ſemiunciae : 7 ſemiunc. = 12 floreni : x florenos; vel 4 orgiae : 7 orgias = 12 flor. : x flor.

Demonſtratio, $m:n = ma:na$ (§. 205.), et
$m:n = r:x$ (per hypoth.); ergo
$ma:na = r:x$ (§. 204. Cor. 6.); ſed eſt
etiam $rb:xb = r:x$ (§. 205.); igitur
$ma:na = rb:xb$. (§. 204. Coroll. 6.).

§. 234. *Problema.* Ad tres quantitates numeratas *ma*, *na*, et *rb*, quartam geometrice proportionalem quantitatem *xb* invenire.

Resolutio. Quaeratur ad tres numeros datos m, n, r quartus proportionalis $x = \frac{nr}{m}$ (§. 214. Cor. 2.); erit quantitas quaesita $xb = \frac{nr}{m} \times b$.

Ex. gr.

Si sit 4 semiunc. : 7 semiunc. = 12 flor. : x fl.; erit, x floren. $= \frac{7 \times 12}{4}$ florenis $= 7 \times 3$ fl. $= 21$ flor.

Demonstratio. Nam cum hic $m:n = r:x$ (juxta regulam): erit et $ma:na = rb:xb$ (§. 233.).

§. 235. *Problema.* Inter duas homogeneas quantitates numeratas na et ra invenire mediam geometrice proportionalem quantitatem xa.

Resolutio. Quaeratur inter numeros n et r medius numerus proportionalis $x = \sqrt{nr}$ (§. 225. Coroll. 1.); est $xa = a\sqrt{nr}$, E. g.: si sit invenienda inter duas lineas 4 digitor., et 16 digitorum, media geometrice proportionalis linea: erit haec $= \sqrt{64}$ digitis $= 8$ digitis.

Demonstratio. Nam cum $n:x = x:r$ (secundum regulam); hinc est $na:xa = xa:ra$ (§. 238.); ergo xa media geometrice proportionalis quantitas inter na et ra (§. 224.).

Scholion. Potest ergo calculus in ejusmodi quantitatibus peragi, quin vel minime respectus habeatur quantitatum ipsarum, dum ut patet in solis numeris calculare licet.

§. 236. Si duae quantitates *A.* et *B* talem respectum ad invicem habeant, ut quaevis pars unius certam partem alterius efficiat; pars data dicitur pars *correspondens* partis datae. Quodsi in una quantitate prima pars *a* ad secundam *α* sit, ut prima correspondens *b* ad secundam *β*; tum affirmatur: *partes a, α* quantitatis primae sunt *partibus correspondentibus b, β* quantitatis alterius *proportionales directe.* Quodsi contra pars prima *a* sit ad secundam *α*, ut secunda correspondens *β* ad primam *b*; tum dicitur: partes primae sunt partibus correspondentibus alterius *inverse proportionales.*

§. 237. Si duae quantitates *A, B* talem respectum ad invicem habeant, ut non solum quaevis pars quantitatis unius certam partem alterius, verum etiam pars (*n*) vicibus major unius, semper partem (*n*) vicibus majorem alterius efficiat; quaevis duae partes unius partibus correspondentibus alterius *directe proportionales sunt,* id est, si *a* partem *b*, et *α* partem *β* efficiat; erit $a:\alpha = b:\beta$. Quodsi autem pars (*n*) vicibus major unius (*n*) vicibus minorem alterius efficiat; quaevis duae partes unius partibus correspondentibus alterius inverse proportionales sunt, id est in hoc casu erit $a:\alpha = \beta:b$, ratio $a:\alpha$ caeterum sive rationalis sive irrationalis sit.

Demonstratio. Nam cum exponens numerus sit (§. 204.) semper hic, sive sit rationalis sive irrationalis, per fractionem exprimi potest. Sit ergo in ratione $a:\alpha$, exponens $= \frac{r}{n}$; erit jam

$a = \frac{r}{n}\alpha$ (§. 204. Cor. 1.). Dum igitur *a* partem *b* dat; dabit etiam $\frac{r}{n}\alpha$ partem *b* (§. 4. Cor. 1.). Quodsi ergo 1) pars (n) vicibus major unius quantitatis etiam semper (n) vicibus majorem alterius det; dabit (n) vicibus $\frac{r}{n}\alpha$, etiam (n) vicibus *b*, id est $r\alpha$ dabit nb (§. 33.); ergo dabit α partem $\frac{nb}{r}$. Atqui α dat partem β (per hyp.), igitur erit $\frac{nb}{r} = \beta$ (§. 4. Cor. 1.), ergo $b = \frac{r\beta}{n}$ (§. 34. Cor. 2.); igitur erit in ratione $b:\beta$ exponens pariter $= \frac{r}{n}$ (§. 204.). Ergo $a:\alpha = b:\beta$.

2) Quodsi vero pars (n) vicibus major unius quantitatis (n) vicibus minorem alterius det; dabit (n) vicibus $\frac{r\alpha}{n}$ partem $\frac{1}{n}$ b (§. 33.), id est $r\alpha$ dabit $\frac{1}{n}$ b (§. 33.), ergo α dabit partem $\frac{rb}{n}$. Atqui α dat partem β (per hyp.), igitur $\beta = \frac{rb}{n}$ (§. 4. Corollar. 1. Arithm.), igitur in ratione $\beta:b$ exponens pariter $= \frac{r}{n}$ (§. 204.), ergo $a:\alpha = \beta:b$.

Scholion. Hoc Theorema continet criterium generale proportionabilitatis, ex quo in omni casu modo facillimo determinari potest, an duae quantitates aliis duabus geometrice proportionales, et utrum ad invicem sint directe vel reciproce proportionales, earum rationes sive rationales sive irrationales sint, cum solummodo investigari debeat, an pars (n) vicibus major unius etiam semper (n) vicibus majorem, vel (n) vicibus minorem partem alterius det et efficiat. E. g. Si quis (n) vicibus celerius laboret, ille caeteris paribus (n) vicibus plus efficiet, ergo labores (operae) sunt celeritatibus directe proportionales; sed quis (n) vicibus citius laborat, is ad idem opus (n) vicibus minori tempore opus habet; ergo hic tempora celeritatibus reciproce sunt proportionalia. E contrario corpus quodpiam tempore (n) vicibus majori nec per (n) vicibus majus spatium, necque per (n) vicibus minus cadit, igitur spatia, quibus corpus quodpiam libere cadit, temporibus minime geometrice proportionalia sunt.

Caput IX.

Applicatio doctrinae de proportionibus ad resolvenda problemata varia in vita communi occurrentia.

A. *In Regula aurea.*

§. 238. *Regula aurea* est methodus, ad tres terminos datos quartum terminum inveniendi, seu

ad datum antecedentem inveniendi consequentem talem, ut ratio haec secunda aequalis cum priore, proportionem efficiat.

Est ergo regula aurea nihil aliud, quam vera *regula proportionis*, docetque ex datis rationibus aequalitatem seu proportionem invenire.

Quemadmodum proportio, ita et aurea regula alia est *simplex*, alia *composita*. Illa est investigatio ad datos tres terminos simplices, ex datis duabus rationibus, quarti geometrice proportionalis, quare etiam *regula trium* vel de tribus numeris nuncupatur. Haec est investigatio ad tres terminos ex pluribus datis compositos, ex datis pluribus rationibus quarti geometrice proportionalis, et vocatur *regula quinque*, dum ad quinqne terminos simplices sextus quaeritur ex datis quatuor rationibus; *regula catenata* (Kettenregel), dum ad 7mum, 8vus etc. quaeritur, ex 6 etc. rationibus.

Regula aurea appellatur etiam directa, et inversa. *Directa* erit, si primus terminus fuerit ad secundum, ut 3tius ad 4tum; *inversa*, si 1mus ad 2dum, ut reciproce 4tus quaerendus ad 3tium datum. Debitus terminorum ordo semper directam dabit.

Corollarium. Regula trium tantummodo in eo casu applicari potest, si quartus terminus quaerendus ad datos tres geometrice sit proportionalis, cum regula aurea mera proportio sit. An autem quaerendus cum datis tribus sit in proportione, et in quali, id est, qualem ordinem quatuor termini istius proportionis habere debeant, utrumque ex contemplanda natura harum quantitatum, et ex conditionibus problematis dati colligi debet.

In omni regula proportionis prae caeteris investigandae erunt rationes quantitatum. Hae ipsae jam vel in natura (qualitate) quantitatum constitutae, vel per leges et consuetudines determinatae sunt, quas ergo rite nosse opertet, antequam problema quodpiam illas rationes spectans resolvi queat. Relationes has quantitatum in vita communi et humano commercio edifcimus plerumque absque omni singulari praeceptione.

§. 239. Quae- et qualescunque autem hae relationes sint, in quibus binae et binae quantitates, vel termini regulae proportionis stant; duo tantum casus possibiles sunt: duae quantitates nempe vel ita invicem in ratione geometrica stant, ut *crescente* aut *decrescente una*, simul etiam *altera crescat* aut *decrescat*, vel etiam ita in ratione ad invicem stare possunt, ut *decrescente una*, *altera crescat*, aut *crescente una*, *altera decrescat*. In primo casu quantitates erunt in ratione *directa*, in altero in ratione *inversa*. Ratio ergo directa semper locum habet, quoties dici potest: quanto plus unius, tanto plus alterius, vel quo minus unius, eo minus alterius. Ratio contra inversa habet locum, ubi affirmari potest: quanto minus unius, tanto plus alterius; vel quanto plus unius, tanto minus alterius.

Investigata jam natura quantitatum, et determinata ratione earumdem binarum et binarum, investiganda erit aequalitas duarum rationum, ut proportio inter quatuor terminos, et ex hac quartus illis tribus datis proportionalis inveniatur. Omnis proportio potest octuplo modo exprimi et reprae-

sentari; posset igitur inter terminos regulae aureae etiam octupla collocatio instare, semperque ex terminis cognitis incognitus inveniretur.

Interea natura rei ipsa ad sequentem methodum inveniendi ordinem terminorum regulae proportionis seu trium conformem et jam probatis propositionibus et sensui communi deducet.

§. 240. Aequalitas inter duas rationes in eo consistit, ut termini rationis unius aut crescant aut decrescant ita, quemadmodum termini rationis alterius crescunt aut decrescunt: ut alteri ita crescant, sicut alteri decrescunt, vel ut alteri sic decrescant, sicut alteri crescunt. In regula trium ergo proprie sic dicta sive directa sive inversa, quatuor terminorum, inquirantur duae rationes instantes, et prout unum alterumve ex praedictis, inventum fuerit; ponatur aequalitas earumdem. *Exempla* rem reddent clariorem.

Detur *Problema* hoc: 6 ulnae stant 18 fl., quanti stant 20 ulnae?

Positis ulnis cum ulnis (invicem) et florenis cum florenis in rationem (cum tantum homogenea sibi comparari possint), quaeratur aequalitas harum duarum rationum. Quemadmodum ulnae crescunt, ita crescunt rhenenses, ergo ut se habent 6 ulnae ad 20 ulnas, ita se habebunt 18 floreni ad quaesitos. Ratio igitur 6 : 20 ulnarum debet aequalis esse rationi 18 : x flor. vel 6 : 20 = 18 : x. Hinc

$$x = \frac{20 \times 18}{6} = 60 \text{ flor.}$$

Problema. 1) 20 ulnae ſtant 60 flor., quanti ſtat 1 ulna? Reſponſ. x florenis.

Quemadmodum ulnae decreſcunt, ita floreni minuuntur; ergo 20 : 1 uln. ſicut 60 : x fl.; vel 20 : 1 = 60 : x, et $x = \frac{60}{20} = 3$ florenis.

Problema. 2) 5 meſſores metunt aliquem agrum intra 2 dies, quamdiu laborabunt 8 meſſores in agro hoc? Reſp. x diebus.

Quo plures meſſores, eo brevius tempus laboris, uti ergo termini rationis prioris 5 : 8 meſſorum creſcunt, ita termini rationis alterius decreſcunt, hinc 5 : 8 = x : 2, vel 8 : 5 = 2 : x;

$$x = \frac{5 \times 2}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4} \text{ diei.}$$

Problema. 3) 100 homines 4 hebdomadis ſufficientia habent alimenta; quamdiu ſufficient haec 40 viris? Reſp. x hebdomadibus.

Quemadmodum virorum numerus minuitur, ita alimenta creſcunt, vel pauciores homines iisdem alimentis longiori tempore vivent; ſicut ergo termini rationis 100 : 40 vir. decreſcunt, ita termini alterius decreſcunt; ergo 100 : 40 = x : 4; ſeu 40 : 100 = 4 : x, et $x = \frac{400}{40} = 10$ hebdomadis.

Problema. 4) Quot operariis opus habeo, ut 1 die opus quoddam conficiant, ſi 8 operarii in illo 3 diebus occupantur? Reſponſ. x operariis.

Quo plur. diebus laboratur, eo minus operarii requiruntur, et quo minus diebus, eo plures operarii; quemadmodum ergo operarii minuun-

tur, ita dierum numerus crescit; hinc ratio x:8 operator. aequalis rationi 5:1 dierum. Ergo x:8 = 5:1, seu 5:1 = x:8, seu

$$1:5 = 8:x; \text{ et } x = \frac{5 \times 8}{1} = 40 \text{ oper.}$$

Detur denique *Problema* 5): Quot ulnas mercabor 20 fl. si 3 fl. pro 1 ulna solvo? Resp. x ulnas.

Ex praedictis facile jam intelligitur, diverso modo aequalitatem duarum rationum obtineri posse. Nam in problemate dato erit: ut floreni decrescunt, ita ulnae decrescunt, et vice versa, ergo 20:3 = x:1 (flor. ... uln.), vel x:1 = 20:3. Tum ut ulnae crescunt, ita crescunt floreni, ergo 1:x = 3:20, et vice versa 3:20 = 1:x; igitur $x = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$ uln.

§. 241. Ergo res non in eo pendet, quem locum in proportione incognita (quaesita x) occupet, cum tamen proportio vera esse, atque semper incognita inveniri possit.

Quodsi vero in aequalitate duarum rationum, vel ordine terminorum regulae aureae, investigandis, multo breviore modo tractare, et non tam facile errare velis; sequere *methodum regulae aureae simplicis* hanc:

1) Quantitatem incognitam x (terminum quaestionis) in loco quarto (in formam proportionis) colloca; quantitatem (vel terminum), cum incognita homogeneam pone tertio loco.

2) Tum investiga rationem inter has duas quantitates, quaerendo, an *plus* vel *minus* ad datam

quaestionem pro responsione prodeat, id est, an investigandus terminus quartus *major* vel minor sit futurus tertio.

3) Si (posita hac quaestione) *quartus* numerus *major* est futurus tertio illi homogeneo; ratio prima crescere, igitur etiam antecedens primae rationis *minor* suo consequente poni debet; si vero *minor;* ratio prior decrescere debet, igitur etiam antecedens primae rationis major suo consequente sit oportet. Semper autem quantitates homogeneae in rationem collocandae, id est, homogenea ad homogenea ponenda sunt. V. g. Sit Exemplum sequens;

6 ulnae constant 20 fl.; quanti stat 1 ulna? x flor. Posito x fl. in loco quarto, et 20 fl. loco tertio, erit 20 : x fl. una ratio. Quaestio: an quantitas x fl. major vel minor sit futura, quam 20 fl. habet responsum: x erit minor 20 flor., quia 1 ulna minoris constat, quam 6 ulnae, ut ulnae decrescunt, ita decrescunt floreni; hinc cum $x < 20$, in ratione prima ponenda, debet antecedens major suo consequente esse; ergo erit 6 : 1 ratio secunda, aequalis primae inventae. Quare $6 : 1 = 20 : x$, et $x = \frac{20}{6}$, ut prius.

Sit Exemplum: 8 operarii conficiunt opus quodpiam 5 diebus; quot diebus operaturi 12 operarii in eodem opere? x diebus.

Positis homogeneïs quantitatibus in rationem, erit: $\overset{\text{dies}}{5 : x}$ prima ratio; verum cum in hac ratione $5 > x$, vel $x < 5$ fiat: hinc erit in altera ratione antecedens major suo consequente, ergo $\overset{\text{Oper.}}{12 : 8}$; crescente enim numero operariorum,

dies laboris decrefcunt; eftque $12:8 = 5:x$; et $x = \frac{40}{12} = 3\frac{1}{3}$ diebus.

Sit Exemplum: 100 floreni dant per annum cenfum 4 florenorum; quantus eft numerus florenorum (Capitale), fi cenfus fit 600 fl. per annum? x flor.

Pofita incognita x in loco quarto, et illi homogenea quantitate: 100 fl. tertio loco, erit (: = 100 : x fl.); et cum $100 < x$ fit; hinc in prima ratione antecedens minor fuo confequente fit oportet; eftque $\overset{\text{Cenf.}}{4:600} = \overset{\text{Capit.}}{100:x}$; et $x = \frac{600 \times 100}{4} = 15000$ fl. Cap.

Semper itaque quantitates homogeneae juxta fe locántur, incognita x loco quarto (ut quartus terminus), homogenea cum x loco tertio (tertius terminus). Tum quaeritur, an x major vel minor fit futura quantitate illi homogenea? Dum x major eft tertio termino: proportio crefcere, igitur terminus primus minor fecundo; et dum x major eft tertio termino: proportio decrefcere, igitur terminus primus major fecundo effe atque ftatui debet.

Hanc methodum inveniendi rectum ordinem terminorum proportionis veram atque fimpliciffimam effe comprobant praecedentes §phi, praecaeteris §. 221. Et quod etiam fit commodiffima et tyronibus facillima, illi ipfi fatentur.

§. 242. *Coroll.* 1) Regula aurea fimplex, dum ex tribus datis quantitatibus, quarta incognita quaeritur, omni igitur difficultate caret, femper-

que juxta methodum commemoratam quantitas incognita aequalis est, producto terminorum mediorum diviso per terminum primum vel *regulae aureae* ipsiusmet haec sunt verba: *multiplicetur numerus quantitatis tertiae per numerum quantitatis secundae, et productum hoc dividatur per numerum quantitatis primae, quotus dabit numerum quantitatis quartae quaesitae* (§. 233.).

Cum jam praedicta methodo debitus ordo terminorum in omni casu, sive rationes sint directae sive reciprocae, et tum ex recto ordine semper quarta incognita tribus datis proportionalis eodem modo inveniatur; methodus haec juste nomen *regulae*, et quidem propter ingentem usum *aureae* meretur.

§. 243. *Coroll.* 2) Restituto jam ordine terminorum regulae aureae debito, resolutio ipsa admodum facilis reddi poterit; si reliqua commoda proportionum etiam in regula aurea applicentur, nempe: dividendo terminos homologos per eundem numerum, qua ratione termini simpliciores fiunt etc. Caeterum regulae multiplicationis et divisionis tum in numeris integris, cum in fractionibus vel numeris mixtis heterogeneis applicandae erunt. Hinc, si termini fuerint numeri mixti heterogenei (diversae speciei), hi prius, si opus est, ad eandem denominationem vel eandem speciem reducendi erunt, antequam regula trium applicetur. V. g.

Si duae librae et 3 semiunciae mercedis cujuspiam 5 fl. 16 crucif. venduntur, quanti veneunt 7 librae et 4 semiunc. ejusdem? Locatis debite terminis erit, 2 ℔ 3 sem.: 7 ℔ 4 sem.

$= 5$ fl. 16 cruc. : x fl. Et $x = \dfrac{5 \text{ fl. } 16 \text{ cruc.} \times 7 \text{ ℔ } 4 \text{ sem.}}{2 \text{ ℔ } 3 \text{ sem.}}$. Et reductione facta:

$2\frac{3}{32}$ ℔ : $7\frac{4}{32}$ ℔ $= 5\frac{16}{60}$ fl. : x flor.; seu
67 : 228 semiunc. = 316 cruc. : x crucifer.

Vel in fractionibus $2\frac{3}{32}$ ℔ : $7\frac{1}{8}$ ℔ $= 5\frac{4}{15}$ fl. : x fl.;
seu $\frac{67}{32}$: $\frac{57}{8}$ ℔ $= \frac{79}{15}$ fl. : x fl.; seu
$67 \times 8 : 57 \times 32 = \frac{79}{15}$ fl. : x fl.; et
$67 \times 8 \times 15 : 57 \times 32 = 79$ fl. : x fl.; ergo etiam
$67 \times 15 : 57 \times 4 \times 79$: x flor.; et $x = \dfrac{57 \cdot 4 \cdot 79}{67 \cdot 15}$ fl.

Exemplum. (ulnae, long)
$\frac{3}{4} : 2 = 3 : x$; erit
$3 : 8 = 3 : x$, seu
$1 : 8 = 1 : x$; $x = 8$.

Exemplum. 12 flor. emuntur 3° 3'; quanti veneunt 14° 4'? x florenis. Erit
3° 3' : 14° 4' = 12 fl. : x flor.; et

$x = \dfrac{14° 4' \times 12 \text{ fl.}}{3° 3'}$.

$x \text{ fl.} = \dfrac{176 \text{ fl.}}{3° 3'} =$

x fl. $= 176$ fl. : $\frac{7}{2} = \frac{352}{7}$
$= 50\frac{2}{7}$ flor.

12 fl. × per
$14° 4' = 14° + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$;
48
12
4
4
176 flor.

Vel $3\frac{1}{2}°$: $14\frac{2}{3}°$ = 12 : x flor., seu
$\frac{7}{2}°$: $\frac{44}{3}°$ = 12 : x flor; seu

$21 : 88 = 12 : x$ flor., et

$7^\circ : 88^\circ = 4 : x$ flor.; ergo x fl. $= \frac{352}{7} = 50\frac{2}{7}$ flor.

Vel $21' : 88' = 12 : x$ flor.

§. 244. *Coroll.* 3) Cum proportionis terminus quartus cum termino tertio cognito homogeneus sit; regula trium simul ratio erit inveniendi qualitatem producti vel quoti (fractionis) in numeris mixtis heterogeneis: si nempe haec debite in proportionem resolvantur, et termini deficientes restituantur. E. g. Sint multiplicanda $6^\circ\ 3'$ per 9 fl. 50 cruc.. Quaeritur, quale sit futurum productum. Hic vera proportio versatur inter 1, factores, et productum quaesitum. Fiat ergo $1^\circ : 6^\circ\ 3' = 9$ fl. : x flor. Ubi x flor. $= 6^\circ\ 3' \times 9$ flor. 50 crucif.; vel

x flor. = 9 fl. 50 cruc. $\times\ 6^\circ\ 3'$ (more mixtorum heterogeneorum) = 63 flor. 55 cruc.

Et sint multiplicandi 9 fl. 50 cruc. per $6^\circ\ 3'$. Fiat 1 fl. : 9 fl. 50 cruc. $= 6^\circ\ 3' : x$ orgias. Ubi

$x^\circ = 6^\circ\ 3' \times 9$ fl. 50 cruc. (more mixtorum) $= 63^\circ\ 5'\ 6''$. Haec producta respectu quantitatis sunt aequalia; est enim: 63 flor. 55 crucif. $= 63\frac{35}{60} = 63\frac{11}{12}$; et $63^\circ\ 5'\ 6'' = 63^\circ + \frac{5}{6}^\circ + \frac{6}{72}^\circ = 63 + \frac{60}{72} + \frac{6}{72} = 63 + \frac{66}{72} = 63\frac{11}{12}$.

§. 245. *Regula aurea composita* illa est, quae plures, quam quatuor terminos continet. Intelligatur tamen, quod parem numerum terminorum habere debeat, ergo 6, 8, 10, et ita porro, cum id quoque rationes compositae requirant, ad quas haec species regulae aureae numeratur. Quodsi nempe fuerit

$a:b = c:x$
$d:e = x:y$; erit (§. 209. et 222.)
$ad:be = c:y$ *formula generalis regulae de quinque numeris.*

Et quodsi fuerit $a:b = c:x$
$d:e = x:y$
$f:g = y:z$; erit (§. 209. 222.)

$adf:beg = c:z$, formula regulae compositae vel catenatae.

§. 246. Cum ratio composita, productum antecedentium ad productum consequentium plurium rationum sit; hinc in hac specie regulae aureae praeprimis rationes singulae inferendae sunt, antequam aequalitas earum investigatur.

Primum perpenditur ratio ea, in quam incognita quantitas pertinet, tum comparantur huic singulae rationes, ponuntur (locantur), componuntur in rationem compositam, et demum exprimitur aequalitas earumdem.

§. 247. Quodsi praescriptam methodum simplicis regulae trium spectaturi simus; *modus resolvendi compositam* sequens erit:

1) Incognita x ponitur ad quartum locum, illique homogenea quantitas loco tertio.

2) Tum accipiuntur duae quantitates homogeneae quaeriturque inter illas ratio ut in methodo simplicis, id est, prout x major vel minor fuerit; primus terminus rationis (antecedens) minor vel major secundo (consequenti) sit oportet. Hoc modo obtinetur proportio.

3) Porro iterum duae homogeneae quantitates sumuntur, rursusque ratio earumdem methodo datà quaeritur, et ita continuatur; quot nempe paria talium quantitatum dantur, tot erunt rationes; sequentes semper infra primam rationem proportionis scribuntur.

4) Ex his demum simplicibus rationibus conficitur ratio composita. Atque haec proprie est aequalis rationi ei, de qua incognita quantitas x consequentem, et illi homogenea antecedentem repraesentat.

5) Ratio composita, quantum fieri potest reducitur ad expressionem simpliciorem, et integra (§. 209.).

Exempla rem declarabunt. Proponatur sequens

Problema 1) 1000 fl. Capital. dant per 12 menses censum 40 flor.; quantum dant censum 50000 fl. Capit. per 7 menses? x flor. censum.

Resolutio. Quemadmodum numerus flor. augetur, ita crescit census; verum simul quemadmodum mensium numerus minuitur, vel augetur, ita census decrescunt, vel crescunt; quo major igitur numerus florenorum, et quo longius tempus vectigale fuerit, eo major census erit, et vice versa. Census itaque sunt in ratione composita florenorum et temporum vectigalium. *Sive:* incognita x ad locum quartum, et censu 40 fl. ad tertium locum positis, tum quaeratur 1000 fl. dant censum 40 fl., quot dabunt 50000 fl.? Resp. plus; ergo terminus primus minor secundo; hinc erit $1000 : 50000 = 40 : x$ (si tempora sint eadem). Porro: pro 12 mensibus obveniunt

40 fl. cenſus, quot obvenient pro 7 menſibus? Reſp. minus; terminus primus igitur debet ma-

menſ.

jor eſſe ſecundo; hinc erit $12:7 = x:y$ (ſi florenorum aequalis numerus). Verum cenſum vel uſoram 40 fl. accipio, dum 1000 fl. per 12 menſes uſuris pendo, ergo accipiam uſuram y flor., ſi 50000 fl., ad 7 menſes uſuris darem, id eſt: $40:y$ eſt ratio compoſita uſurarum; tunc tantum accipio 40 fl. uſuram, ſi 1000 fl. 12 ſumo, vel ſi 1000 fl. per 12 menſes uſuris do, et y florenorum uſuram, ſi 50000 fl. ſepties ſumo (vel per 7 menſes uſuris do). Quemadmodum ergo ratio $40:y$ (uſurarum) ratio eſt compoſita, ita etiam obtinendae aequalitatis cauſſa ex 1000 : 50000, et ex 12 : 7 formanda eſt ratio compoſita; hinc erit ex

$$\begin{array}{ll} 1000:50000 = 40:x, & \text{et} \\ 12:7 \quad = x:y & \\ \hline 12000:350000 = 40:y, & \text{ſeu} \\ 12:350 = 40:y; & \text{ergo} \end{array}$$

$$y = \frac{350 \times 40}{12} = 1166\tfrac{2}{3} \text{ flor.}$$

In Operatione ipſa termini ita locantur:

$$\begin{array}{l} 1000:50000 = 40:x \\ 12:7 \\ \hline 12:350 = 40:x. \end{array}$$

Detur *Problema* hoc: 2) Sit murus 10' longus
6' latus
2' profundus,
hunc exſtruit 1 caementarius; deſideratur murus exſtruendus hoc ipſo tempore, qui ſit

12′ longus
8′ latus
12′ profundus.

Quot caementarii requiruntur? Incognita x ad locum quartum, et 1 ad tertium positis, erit: : = 1 : x; tum fiat

Longitud. 18′ : 12 = 1 : x { cum pauciores murarii requirantur, dum murus 12′ longus est, quam dum 18′ longus est, ergo 18 : 12.

Latitud. 6′ : 8′ = { Porro, dum murus 8′ est latus plures operarii requiruntur, quam dum est 6′ latus; ergo 6′ : 8′.

Profundit. 2′ : 14′ = { Deinde, si murus 14′ profundus est, plures caementarii requiruntur, quam si sit 2′ profund.; ergo 2′ : 14′.

At ratio (1 : x) caementariorum, est composita, copia enim operariorum sequitur (est in ratione) longitudinem, latitudinem et profunditatem muri; hinc ex rationibus

18 : 12 vel 6 : 4 sive 3 : 2
6 : 8 — 3 : 4 — 3 : 4
2 : 14 — 1 : 7 — 1 : 7

composita ratio 9 : 56 fieri debet; haecque ratio 9 : 56 aequalis est huic 1 : x, vel
9 : 56 = 1 : x, et
$x = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9}$ caement.

Scholion. x, considerantur ut vires. Ad haec, omne solidum consideratur, ut extensio in longum, latum et profundum; quo longius, latius,

et profundius corpus (murus) eſt, eo plures requiruntur caementarii ad illud exſtruendum, aſſumpto eodem tempore. Quodſi autem tempus fuerit diverſum? In ſequenti

Problemate. 3) In muro exſtruendo, qui

10 pedes altus
4 pedes latus et
940 orgias longus eſt, laborant
100 caementarii per 3 menſes;
quovis menſe per 21 dies,
quovis die per 8 horas;

quot caementarii requiruntur ad conſtruendum murum, qui 12 pedes altus
14 pedes latus et
4286 orgias longus ſit, et caementarii
per 6 menſes; quovis menſe
per 24 dies; et quovis die
9 horis laboraturi forent?

Reſolutio. Requiruntur x caementarii; ergo x ad quartum locum, et 100 ad tertium. Modo quaeritur: ſi murus 940 orgias eſt longus, requiruntur 100 caementarii, quot ſi ſit murus 4286 orgias longus. Plus; ergo $100 < x$; hinc 940 ad primum et 4286 ad ſecundum locum ponendum; porro, ſi murus 10 pedes eſt altus, requiruntur 100 caementarii, quot ſi 12 pedes altus ſit? Plures; hinc 10 ad primum et 12 ad ſecundum locum; poſtea ſi murus eſt 4 pedes latus requiruntur 100 caementarii, quot eorum, ſi murus ſit 14 pedes latus? Plures; ergo 4 ad primum et 14 ad ſecundum locum. Erit ergo calculatio tempore non ſpectato haec;

940 : 4286 = 100 : x
10 : 12
4 : 14

Verum numerus caementariorum non solum secundum longitudinem, latitudinem, et altitudinem muri augetur, sed etiam rationem habet ad durationem temporis. Quare ulterius quaeritur: si 100 caementarii laborant, opus habent 3 mensibus; si per 6 menses laboratur, quot caementarii requiruntur? Minus; cum ergo 100 > x sit, primus terminus major secundo sit oportet, vel 6 : 3 mens. = 100 : x. Tum, si 24 diebus laboratur, pauciores operarii requiruntur, quam si 21 diebus laboretur, ergo 100 > *x* et ideo 24 : 21; denique si 9 horis laboratur, pauciores operarii requiruntur, quam si 8 horis laboretur, hinc quia 100 > *x*, erit 9 : 8 ponendum. Nunc jam tota calculatio haec est:

940 : 4286 = 100 : x
10 : 12
4 : 14
6 : 3
24 : 21
9 : 8.

Sed (100 : x) est ratio composita, et igitur rationi compositae ex simplicibus rationibus primum aequalis; nam numerus operariorum stat in ratione altitudinis, latitudinis et longitudinis muri, simulque temporis, quo laborant. Hae rationes autem

940 : 4286	abbreviatae	470, 940 : 4286, 2143
10 : 12		10 : 12, 2
4 : 14		2, 4 : 14, 7
6 : 3		6 : 3
24 : 21		3, 24 : 21, 7
9 : 8		3, 9 : 8.

dant has:

470 : 2143
10 : 7
3 : 7 ; compositaque est

$(470 \times 10 \times 3) : 2143 \times 7 \times 7 = 14100 : 105007.$

Ergo $14100 : 105007 = 100 : x$, et

$x = \frac{105007}{141} = 744\frac{103}{141}.$

Scholion. Requiruntur ergo 744 vel potius 745 caementarii. Posset operatio etiam hoc modo exhiberi. Longitudo, latitudo, et altitudo constituunt corpus, ac menses, dies, et horae tempus laboris. Quo major soliditas corporis (muri), et quo brevius tempus est, eo plures operarii requiruntur, id est, vires (operarii) sunt in ratione composita directe ut longitudo, latitudo, et altitudo, et reciproce ut tempora. In consequentiam hujus rationes ipsae inveniendae forent: Si murus (940° longus, 10' altus et 4 pedes latus) est, requiruntur 100 operarii; quot requiruntur, si murus (4286° longus, 12' altus, et 14' latus) sit? Responsio est: plures; hinc $x > 100$; et ergo proportio $(940° \times 10' \times 4') : (4286° \times 12' \times 14') = 100 : x$. Porro, dum laboratur per (3 menses, quovis mense per 21 dies, quovis die per 8 horas), requiruntur 100 operarii; quot requiruntur, si per (6 menses, quovis per 24 dies, et quovis die per 9 horas)

laboretur? Resp. pauciores. Hinc $100 < x$, et proportio erit (6 menses $\times$ 24 dies $\times$ 9 hor.): 3 M. $\times$ 21 d. 8 hor.) = 100 : quartum. Debet igitur ex simplicibus rationibus

$(940^\circ \times 10' \times 4'):(4286^\circ \times 12' \times 14') = 100:x$
$(6 \times 24 \times 9):(3 \times 21 \times 8)$ ratio composita formari, et haec composita ratio deinde aequalis est rationi $(100:x)$ caementariorum. Sed ratio

$(940^\circ \times 10' \times 4'):(4286^\circ \times 12' \times 14')$ abbreviata, aequalis

$(470^\circ \times 5' \times 2'):(2143^\circ \times 6' \times 7')$; et
$(6 \times 24 \times 9):(3 \times 12 \times 8) = (2.3.3.):(1\text{M}.7\text{d}.1\text{h}.)$
$= 18:7$. Hinc erit

$$\left.\begin{array}{r} 470:2143 \\ 5:6 \\ 2:7 \\ 18:7 \end{array}\right| = 100 : x$$

seu

$$\begin{array}{l} 470 \times 10 : 2143 \times 24.7 = 100:x \\ 3.18 \quad\quad : 7 \\ \hline \end{array}$$

Ergo $470 \times 30 : 2143 \times 49 = 100 : x$. Ut antea.

Coroll. Secundum hanc methodum quivis terminus regulae proportionis jam inveniri poterit, dummodo primum singulae rationes rite expressae, et termini debite locati fuerint.

Exempla regulae aureae compositae methodo data solvendae.

1) Pistrinum (Stampfmühle), cujus tudicula quaevis 80 ℔ ponderat, tundit 1 die, 25 modios. Sit construenda alia mola tudicularia juxta eundem modulum, cujus tudicula 100

℔ ponderet; quantum haec mola poterit molere, si rota prioris quinquies rotetur durantibus 3 rotationibus posterioris. Resp. x modios.

$$\begin{array}{llll} & \text{℔} & & \text{Mod.} \\ \text{Eritque} & 80:100 & = & 25:x, \text{ et} \\ & 5:\ \ 3 & = & \\ \hline \text{seu} & 4,8:10,5 & = & 25:x \\ & 5:\ \ 3 & & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{et}\quad 4:3 = 25:x.\ \text{Ergo}\ x = \frac{3 \times 25}{4}$$

$$\text{seu}\quad x = \frac{75}{4} = 18\tfrac{3}{4}\ \text{mod.}$$

2) 7 Lignicidae conficiunt per 6 dies 64 orgias lignorum; quot efficient 3 ligna caedentes per 4 dies? Resp. x orgias. Simplices rationes erunt;

$$\begin{array}{lll} \text{Caed.} & & \text{Org.} \\ 7:3 & = & 64:x \\ 6:4 & = & \text{etc.} \quad \text{Ex his composita erit} \\ \hline 42:12 & = & 64:x;\ \text{seu} \\ 7:2 & = & 64:x. \end{array}$$

$$\text{Ergo}\ x = \frac{2 \times 64}{7} = 18\tfrac{2}{7}\ \text{org.}$$

3) 8 Scribae conscribunt per 5 dies 12 Scapos; quamdiu sufficiet volumen minus 12 scribis? Resp. per x dies. Et erit

$$\begin{array}{lll} \text{scap.} & & \text{dies} \\ 12:20 & = & 5:x,\ \text{et} \\ 12:\ \ 8 & & \\ \hline 144:160 & = & 5:x; \end{array}$$

$$\text{et}\ x = \frac{800}{144} = 5\tfrac{5}{18}\ \text{diebus.}$$

4(3 Homines quotidie 7 horis laborantes, absolvunt 2 diebus 84 hexapedas; quot facient 5 homines 3 diebus quotidie 4 horis laborantes?

Resp. x orgias. Et erit

hom. hexap.
3 : 5 = 84 : x
2 : 3 dies
7 : 4 hor. 2

7 : 10 = 84 : x. Ergo $x = \frac{840}{7} = 120$ hexap.

5) Ager continens 10000 orgias ab 8 messoribus 3 diebus metitur; sit ager 6000 orgiarum 1 die metendus, quot messores requiruntur? Resp. x messores.

mess.
Eritque 10000:6000 = 8:x.
1: 3

10000:18000 = 8:x; seu
5:9 = 8:x; ergo
$x = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$.

6) Capitale 100 fl. dat censum annuum 6 fl; quantum est Capitale: si census per 5 annos sit 20000 fl.? Resp. x fl. Capitale. Eritque

Cens. Cap.
6:20000 = 100:x
1: 5

6:100000 = 100:x; ergo $x = \frac{10000000}{6}$ fl.

7) Si 9 ulnae viennenses 10 burgund. efficiant, et 67 ulnae burgundicae 603 fl. holland. veneant; tum 1 fl. holl. 20 Stüv. 105 Stüv. 1 aureum, dant, et 1 holl. aureus 4 fl. 48 cru-

cif. ſtat; quanti ſtant 63 ulnae viennenſes hujusce panni in moneta viennenſi?

9:10 = 63:x 67:603 1:20 105:1 $1:4\frac{7}{15}$	ſeu 9:2,10 = 63:x 67:603, 201 1:20 21,105:1 15:67
ſeu	189:1608 = 63:x 3 : 1608 = 1:x; ergo

$x = \frac{1608}{3} = 536$ fl. viennenſ.

8) 5 Aurei holland. dant $26\frac{1}{4}$ fl. holl.; pro 150 fl. in Banco 100 duntaxat obtinentur. Porro 100 imperiales holl. dant Lipſiae $133\frac{1}{4}$ imperiales, et denique 2 holl. imperiales ſtant 5 holl. florenis; quot imperiales lipſienſes ſunt pro 2000 holl. aureis ſolvendi? Reſp. *x*. Et erit

$5:26\frac{1}{4} = 2000:x$ 5:2 $100:133\frac{1}{4}$ 105:100	10.20:105 = 2000:x 5:2 4,400:533 105:100
Ergo	200:533 = 2000:x Seu 1:533 = 10:x $x = 5330$ imper. lipſienſ.

B. In Regula catenata.

§. 248. Quodſi conjunctio plurium proportionum in eo conſiſtat, ut ſemper duae illarum, terminum communem habeant, hae inter ſe ita ordinari poſſunt, ut terminus quartus cujusvis proportionis, tertius proportionis ſubſequentis fiat; et

tunc eſt productum omnium terminorum primorum (antecedentium) ad productum omnium ſecundorum (conſequentium), ut terminus tertius primae proportionis ad terminum quartum ultimae proportionis.

Demonſtratio. Sint proportiones ſequentes

$a:c = \gamma:\beta$
$d:\gamma = f:\lambda$
$g:h = \lambda:\varphi$
$\varphi:k = x:q$; poterunt nonnullae earum ordinis gratia modo hoc permutari;
$c:a = \beta:\gamma$
$d:f = \gamma:\lambda$
$g:h = \lambda:\varphi$
$k:q = \varphi:x$. Componendo erit

$cdgk:afhq = \beta:x$.

Coroll. 1) Quodſi ergo duae magnitudines ſibi invicem conveniant, et una earum, inde etiam ejus ratio, incognita ſit, omnes e contrario mediae rationes inter easdem cognitae ſint; ratio illa incognita, et haec ex his compoſita ratio, dant proportionem, ex qua ſemper incognita illa quantitas inveniri poteſt. In eo conſiſtit ſic dicta regula (ratio) catenata, uſusque illius eſt in curſu permutationis numariae, in permutatione monetae, menſurarum, et ponderum in alia, indigena et externa.

Rationes mediae commodi cauſſa plerumque abbreviatae duntaxat adhibentur, hinc etiam conſequens cujusvis non amplius aequalis manet antecedenti immediate ſubſequentis rationis, et proportio memorata ſequenti lege erit determi-

panda: Primus antecedens cum primo termino proportionis, quivis consequens cum antecedenti immediate sequentis, et ultimus consequens cum secundo termino proportionis ejusdem denominationis (homogeneus) esse, vel ad illam restitui debet.

Coroll. 2) Quodsi itaque valor de x quaeratur, erit $x \times cdgk = \beta \times afhq$; et

$$x = \frac{afhq}{cdgk}.$$

Coroll. 3) Ex proportionibus ejusmodi componendis, merae aequationes effici possunt, quae postea inter se multiplicantur, et hac ratione etiam ex illis incognita inveniri potest. Est enim ex

$c:a = \beta:\gamma$ futurum $c\gamma = a\beta$
$d:f = \gamma:\lambda$ - - - $d\lambda = f\gamma$
$g:h = \lambda:\varphi$ - - - $g\varphi = h\lambda$
$k:q = \varphi:x$ - - - $kx = q\varphi$; et ex

$cdgk:afhq = \beta:x$, erit $(cdgk)x = (afhq)\beta$; quod utrumque productum hac ratione in aequationes resolvi poterit:

$x = \beta$	vel hac ratione	x	β
$c = a$		c	a
$d = f$		d	f
$g = h$		g	h
$k = q$;		k	q.

Ubi ergo quantitates priores, terminum compositum membri aequationis primi, et posteriores secundi constituunt.

Cor. 4) Theorema mox commemoratum formam ac rationem *regulae catenatae,* continet, in qua propositio prima per x et secunda per β repraesentatur. Factores, in Algebra juxta se poni soliti, hic infra se locantur, et linea divisionis in Algebra horizontaliter duci solita, hic ducitur perpendiculariter. Propositio prima plerumque omittitur, illiusque loco denominatio in formam quaestionis ponitur. V. g.

*?	β	vel	x?	β
c	a		c	a
d	f		d	f
g	h		g	h
k	q.*		k	q.

Coroll. 5) Regula composita seu catenata ergo consistit ex continua serie aequationum, in quibus semper denominatio membri 2di praecedentis aequationis etiam denominatio primi membri proxime sequentis fit. Ambae columnae considerantur tanquam producta aequalia, quorum aequalitas utrinque per idem dividendo non turbatur, sed hoc pacto potius utrumque productum simplicius redditur. Sub fine incognita liberatur a suo factore, si utrumque productum per eundem dividatur.

Exempla Regulae catenatae.

1) Quot rhenenses efficiunt 12 jactus Septenariorum?

Operatio.

Cum 1 *Iactus* =	5 *Septenariis*	Vel 5 flor.	12 Iact.
1 *Septenarius* =	7 *cruciferis*	1 jact.	5 sept.
60 *cruciferi* =	1 *floreno*	1 sept.	7 cruc.
x *floreni* =	12 *Iact.*	3,60 cruc.	1 fl; ergo

erit $60\,x$ fl. $= 35 \times 12$ | $5x$ | 35, et

$$x = \frac{35 \times 12}{60} = 7 \text{ flor.} \qquad x = \frac{35}{5} = 7 \text{fl.}$$

Hic incognita ratio 12 jact. ad x fl. composita est ex tribus mediis rationibus his:

1:5 vel 12:60 jactuum ad septenarios
1:7 vel 60:420 septenariorum ad cruciferos
60:1 vel 420:7 cruciferorum ad florenos.

Deberet itaque scribi

$$\begin{array}{l} 1:5 = 12:x \\ 1:7 \\ 60:1 \\ \hline \end{array}$$

Ubi $60:35 = 12:x$; seu
$5:35 = 1:x$; ergo $x = \frac{35}{5} = 7$ flor.

2) Quot florenos polon. dant 1000 aurei?

Operatio.

Si 50 aurei Viennae dant 101 Imper. in Banco
1 Imperialis = 119 grossis polonicis
30 grossi polon. = 1 floreno
x flor. polon. = 1000 aureis. Erit aequalia per aequatia multiplicando:

$$\begin{aligned} 50 \times 30x &= 101 \times 119 \times 1000;\ \text{seu} \\ 15x &= 101 \times 119 \times 10;\ \text{seu} \\ 3x &= 101 \times 119 \times 2.\ \text{Ergo} \\ x &= \frac{101 \times 119 \times 2}{3} = 8012\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

flor. polon.

3) Quaeritur, quot aureos in Banco dent 500 Rubeli (unciales russici)?

Operatio.

Cum 1 Rubelus = $47\frac{1}{2}$ Stuver.
20 Stuver. = 1 fl. holland.
$2\frac{1}{2}$ fl. holl. = 1 holl. Species-Thaler.
100 Species Thl. = 142 Thaler. berolin.
3 Thaler. berol. = 1 aureo Berolini, et pro
105 aureis = 100 in Banco
x aurei in Banco = 500 Rubelis.

Vel	vel abreviata	
$1 = 47\frac{1}{2}$	~~2~~	~~95~~, 19
$20 = 1$	~~20~~	1
$2\frac{1}{2} = 1$	~~5~~	~~2~~
$100 = 142$	~~100~~	142
$3 = 1$	3	1
$105 = 100$	21, ~~105~~	~~100~~
$x = 500$;	x	~~500~~, ~~100~~, 5
	21. 3x	$142 \times 19 \times 5$

seu $63x = 710 \times 19$; et $x = \frac{13490}{63} = 214\frac{8}{63}$ aureis in Banco.

4) Mercator lipsiensis curat adferri aureos Amstelodamo; quot imperiales sunt solvendi pro 500 aureis? Si 5 aurei dent 26 florenos;
5 flor. = 2 thaler. holland.
100 thaler. holl. = $133\frac{1}{4}$ imperial. lipsiens.

Operatio.

x Imper. lipſ.	50 aurei	Vel x?	500, 5
5 aurei	26 flor.	5	26
5 flor.	2 thl. holl.	5	2
100 thaler	$133\frac{1}{4}$th.lpſ.	400	533
103 thl. lipſ.	100th.Bnc.	103, 21	100, 2
		21x	26 × 533 × 2;

$$\text{ergo } x = \frac{26 \times 533 \times 2}{21} = \frac{27716}{21} = 1319\frac{17}{21}.$$

5) Duo agricolae agros ſuos permutare volunt. Unus eorum poſſidet agrum 5 juger., qui annue 250 modios procreat, de quibus 1 modius 4 fl. venditur: alter illi daturus ſolum pratenſe dicit: 1 jugerum fert annue 50 centenarios foeni, 1 centenarius ſtat 2 fl. Quantam terram pratenſem debet igitur hic illi dare? Ut nullius annuum vectigal ſolarium diminuatur.

Operatio.

x Iugera prati = 5 Iug. agri	Vel x	5
5 Iugera agri dant 250 modios	5	250,5
1 modius = 4 flor.	1	4, 2
2 flor. = 1 centen. foeni	2	1
50 Centen. dant 1 Iug. prati.	50	1
500x = 20 × 250 = 5000.	x	10

6) Quot aureos regios dant 3000 Ludovici aurei? Si 1 Ludovicus aureus det 24 gallicas livres, 6 livres 1 thalerum-franco-gallicum a fronte nomen gerentem ſeu 2 fl. 16 crucif. et 13 flor. 20 crucif. 1 aureum regium dent.

Operatio.

1 aureus Lud. = 24 livres	1	24	vel 1	24
6 livres = 2 fl. 16 cr.	6	$2\frac{4}{15}$	90	34
13 flor. 20 cr. = 1 aur. reg.	$\frac{40}{3}$	1	4	3
x aurei reg. = 3000 L. aur.	x	3000	x	3000

x | 20 × 102; seu

$x = 2040$ aureis regiis.

Cum 3000 aurei ludovici = 2040 aureis regiis; erit 1 ludovicus aureus : 1 aureum regium = 300 : 204 = 150 : 102 = 75 : 51.

7) Detur Exemplum superius 7 (§. 247.), per regulam catenatam resolvendum.

Cum 9 ulnae Vien. = 10 burg.	9	10,2
67 uln. burg. = 603 fl. holl.	67	603,201
1 fl. holland. = 20 Stuber.	1	20.4
150 Stuber. = 1 aur. holl.	150;21	1
1 aureus holl. = 4 fl. 24 cr.	3.15	67
x fl. vienn. = 63 uln. vien	x	63,7

$21x = 2 \times 201 \times 4 \times 7$;

seu $x = \frac{201 \times 56}{21} = \frac{11256}{21} = 536$ fl. vienn.

8) 6 Livres efficiunt 1 thalerum vel uncialem coronatum; 4 thaleri coronati dant duplum aureum regium; aureus regius duplus valet 9 fl.; in qua ratione stant livres ad rhenenses?

Operatio.

6 Livres	= 1 thaler. coron.	vel 8 liv. 2	1
4 thal. coron.	= 1 aureo reg. dup.	4	1
1 aur. dupl.	= 9 flor.; hinc	1	3 fl.
6 × 4 Livres	= 9 flor.; seu	8 livres	3 flor.

24 Livres = 9 flor. Ergo Livres : ad florenos = 9 : 24 = 3 : 8.

9) Quot efficiunt 100 librae hamburgenses Viennae? Si 5 hamburgenses = 6 vratislaviens., et 7 vratislavienses = 5 viennensibus sint.

Operatio.

x Vienn.	=	100 Hamburg.
5 Hamb.	=	6 Vratislavien.
7 Vratisl.	=	5 Viennens.
7 x W.	=	600; ergo $x = \frac{600}{7} = 85\frac{5}{7}$ ℔ vienn.

C. In Regula Reesiana.

§. 249. *Theorema.* Effectus sunt in ratione composita directa caussarum suarum et temporum, quamdiu caussae istae uniformiter agunt.

Demonstratio. Sint duo effectus E, et e, eorum caussae C, et c, et tempora T, et t. Assumatur tertius effectus $\mathfrak{E}$, ejus caussa sit C, et tempus t. Cum duae caussae aequali tempore agunt, earum effectus sunt ut caussae (id est effectus sunt proportionales suis caussis); major effectus majorem habet caussam, minor minorem caussam supponit caeteris paribus, et vicissim major caussa majorem habet effectum, minor minorem caeteris paribus; hinc erit $\mathfrak{E} : e = C : c$.

Dum caussa duorum effectuum aequalis vel eadem est, effectus stant in ratione temporum, id est, eadem caussa longiori tempore agens majorem producit effectum, minor minorem caeteris paribus; hinc $E:\mathfrak{E} = T:t$. Ductis terminis inter se, habetur vera proportio. $E:e = CT:ct$.

Vel E $\mathfrak{E}$ e
C Ç c
T t t; erit

$\mathfrak{E} : e = C : c$; et
$E : \mathfrak{E} = T : t$. Componendo fit

$E : e = CT : ct$.

Coroll. 1) Si plures uniformiter ad effectum conconferentes caussae adsint: V. gr. praeter *C* et *c* adhuc *K* et *k* etc.; tum etiam stabit:

$E:e = TCK$ etc. : tck etc. Erit nempe in hoc casu ratio effectuum jam ex pluribus caussis composita; idem valet de temporibus.

Coroll. 2) Aequationes jam, quae ex his proportionibus promanant; $Ect = rCT$, vel $Eckt = eCKT$ etc. conficiunt fundamentum, quo *regula reesiana* nititur. Signum aequalitatis (=) exprimitur per lineam verticalem, et juxta se positio factorum permutatur a Reesianis in infra se positionem eorumdem, ferme in hac forma:

e	E	seu	E	e
C	c		c	C
K	k		k	K
T	t		t	T

Et si tempora sint aequalia:

e	c
C	E.

Terminus deficiens plerumque, ut in regula catenata, in initio ponitur, licet et alibi stare posset; ita etiam similes abbrevationes, et praescripta applicantur. V. g.

5 molae serratoriae serrant 6 diebus 200 tabulas; quot asseres serrabunt 8 molae tabulares per 14 dies?

Operatio.

Cum $E:e = CT:ct$, vel $Ect = eCT$; erit

e	affer. hic	x?	E affer. hic	200	Vel e?		~~200~~, 40 E
C	molae	5	c molae	8	C 5		~~8~~, 4. c
T	dies	6	t dies	14	T ~~6~~, 3		14. t
					3 e		40×14×4.

Ergo $e = 746\frac{2}{3}$ tabul.

Cum sit $Ect = eCT$; posset debite substitutis valoribus loco quantitatum in hac aequatione, valor incognitae (e) statim inveniri. Est ergo

$$200 \times 8 \times 14 = e \times 5 \times 6: \text{ et } \frac{200 \times 8 \times 14}{5 \times 6} = e.$$

Exempla Regulae reesianae.

1) Cum vas plenum aqua salsa 235 grana ponderat, 56 grana salis insunt; quantum inesset salis, si 345 grana ponderaret?

Operatio.

e? grana salis	56 grana salis E	vel e?	56
C gr. salsae 235	345 salsae c	235. 47	345.69;
	Ergo	47.e	56×69

$$e = \frac{56 \times 69}{47} = 82\tfrac{10}{47} \text{ gr. salis.}$$

2) Equi 4 consumunt per 6 dies 1 Scheffelum avenae; quamdiu sufficient 24 (mensurae id genus) Scheffeli pro 9 equis?

Operatio.

e	E	vel hic t?	24 Scheffeli e	e?	24,8
C	c	c equi 9	6 dies T	3,9	6, 2
T	t	EScheffel. 1	4 equi C	1	4

$9t = 24 \times 24$; seu $e = 8 \times 8 = 64$.

Vel $Ect = eCT$; ergo

$1 \times 9 \times t = 24 \times 4 \times 6$; ex qua

$$t = \frac{24 \times 4 \times 6}{9} = 64.$$

Secundum methodum regulae aureae staret:

Scheffel.			dies		
1	: 24	=	6	:	x
9	: 4	=	x	:	y

$9 : 24 \times 4 = 6 : y$; ergo $y = 64$.

3) 7 Lignicidae caedunt 6 diebus 64 orgias lignorum: quot caedent 3 caedentes ligna 4 diebus?

Operative.

Ect = eCT; et

E	e	Vel hic x?	64
c	C	7	3
t	T	6, 2	4, 2
		7 E	128

$E = \frac{128}{7} = 18\frac{2}{7}$ orgiis. Ut antea.

4) Pro una hebdomade accipit Judaeus quidam pro 1 fl. censum 3 crucifer; quantum lucrantur illi 570 floreni per 12 annos? Hoc pacto.

e	E	Vel hic e?	$\frac{1}{20}$ fl.	Seu 20 e?	1
C	c	1 fl.	570 fl.	4, 1	570, 114
T	t	$\frac{1}{52}$ ann.	12 ann.	1	12, 3
					52

e = 17784 flor. $e = 52 \times 114 \times 3$.

Vel 1 fl. : 570 fl. $= \frac{3}{60}$: x usurae

$\frac{1}{52} : 12 = x : y$; seu

$60 : 570 = 3 : x$

$1 : 12 \times 52 = x : y$; hinc

$60 : 570 \times 12 \times 52 = 3 : y$ fl. seu

$2 : 57 \times 12 \times 52 = 1 : y$; et

$y = 57 \times 6 \times 52$.

5) Quantum dant censum 20000 fl. Capit. per 12 annos, si pro Centum detur usura annua fl. 6.

Ect = e C, T.

e	E	Vel x?	6
C	c	100	20000, 200
T	t	1	12

x = 72 × 200

x = 14400.

Vel 100 : 20000 = 6 : x
1 : 12 = x : y

1 : 2400 = 6 : y
y = 2400 × 6 = 14400 fl. cenſ.

6) 15 Textores lintearii quotidie per 10 horas laborantes, conficiunt 5 hebdomadibus et 3 diebus, partes 50 lintei; quot textores requiruntur, ad efficiendas 120 partes lintei, ſi hi per 3 hebdomadas et 4 dies quotidie 15 horis laborent. Reſp. x textores.

Operatio.

x?	15	ſeu x :	15
3	5	8	5
4	3	4	3
15	10	15	10
50	120	10, 50	120, 30

x = 30 textor.

D. *In Regula Societatis.*

§. 250. *Regula ſocietatis* eſt methodus inveniendi quantitates ſingulis proportionaliter competentes, qui prius ſocietate inita *ſummam quamdam* contulerunt, eaque vel quidpiam lucrati, vel *damnum commune* paſſi ſunt.

Docet ergo regula societatis datis duabus summis, et unius summae partibus, partes alterius summae invenire.

§. 251. *Problema.* Numerum quempiam $= E$, in 3 partes hac ratione distribuere, quo hae tres partes sint, ut aliae datae f, g, h.

Resolutio et Demonstratio. Sint istae 3 partes x, y, z; erit juxta hypothesin

$f:g = x:y$, seu $f:x = g:y$
$g:h = y:z$ $\quad g:y = h:z$. Inde

$f:h = x:z$ seu $f:x = h:z$. Consequenter $f:x = h:z = g:y$ (rationes aequales). Verum in rationibus aequalibus est summa antecedentium ad summam consequentium, sicut quivis antecedens ad suum consequentem (§. 206.); hinc erit

$f:x$
$h:z$
$g:y$

$$(f+g+h):(x+y+z) = f:x = g:y = h:z.$$

Sed $x+y+z = E$. Ergo

$$(f+g+h):E = f:x \Big\} \; x = \frac{E \times f}{f+g+h} = \text{parti 1mae}$$

$$(f+g+h):E = g:y \Big\} \; y = \frac{E + g}{f+g+h} = \text{parti 2dae}$$

$$(f+g+h):E = h:z \Big\} \; z = \frac{E \times h}{f+g+h} = \text{parti 3tiae}$$

Coroll. 1) Idem valet, si totum in plures partes foret distribuendum: semper erit summa ante-

cedentium ad summam consequentium aequalium rationum, ut quivis antecedens ad suum consequentem, et ex his proportionibus quaevis pars totius distribuendi invenietur.

Coroll. 2) Unde hoc *Theorema:* Si aliquod totum in plures partes distribuendum sit, ita, ut hae partes aliis datis partibus sint proportionales; semper stabit: sicut se habet summa partium datarum ad totum integrum, ita se habet quaevis pars data ad partem quamvis quaesitam.

Coroll. 3). Regula societatis nihil aliud est, quam regula aurea pluries repetita. Est enim

$$(f+g+h):(x+y+z) = f:x = g:y = h:z, \text{ etc.}$$

§. 252. Si plures socii societatem ineunt, et summam conferunt, cuivis eorum de communi lucro tantum proportionalis pars obvenire debet, uti etiam de damno communi pars proportionalis a quovis ferenda. Haec proportionalis compars de lucro vel damno communi eo major est futura, quo majus collatum singuli fuerit; crescit itaque compars quaevis ut collatum singuli crescit, decrescitque, hoc decrescente, caeteris paribus.

Quo major summa communis (collatorum) est, eo majus erit lucrum vel damnum commune, et vicissim, quo minor, eo minus lucrum vel damnum. Quodsi igitur totum lucrum cum totali summa collatorum comparetur; patet manifeste: *Esse totalem summam collatorum ad totum lucrum vel damnum, sicut est collatum singulum ad lucrum vel damnum singulum. Vel collatae summae sunt directe ut lucra; Capitale est ut usura.*

Jam quot ſunt collata ſingula, tot ſunt proportiones ſingulae inducendae, ut inveniatur lucrum vel damnum ſingulum.

Scholion. Exemplum. Conferrat A 1000 fl. $= f$
B 3000 fl. $= g$.

Lucrum commune ſit $=$ 400 fl. $= e$; ſit hoc e diſtribuendum in duas partes x, y, quae eandem rationem ſervent, ut f, g. Cum

$f : g = x : y$; ſeu $1000 : 3000 = x : y$; erit (§. 219.)

$f + g : f = (x + y) : x$; ſeu $1000 + 3000 : 1000 = x + y : x$; id eſt;

$f + g : f = e : x$, ſeu $1000 + 3000 : 1000 = 400$ fl. $: x$; ſeu

$f + g : e = f : x$; ſeu $1000 + 3000 : 400$ fl. $= 1000 : x$. Et

$f + g : g = x + y : y$; ſeu $1000 + 3000 : 3000 = 400 : y$; ſeu

$f + g : g = e : y$; ſeu $1000 + 3000 : 400 = 3000 : y$; id eſt:

$f + g : e = g : y$; ſeu $1000 + 3000 : 400 = 3000 : y$. Unde

$$x = \frac{ef}{f + g}; \text{ ſeu } x = \frac{400 \times 1000}{4000} = \frac{400000}{4000} = 100 \text{ fl.}$$

$$y = \frac{ef}{f + g}; \text{ ſeu } y = \frac{400 \times 3000}{4000} = 300 \text{ fl.}$$

Pluribus partibus datis ſimili modo proceditur.

Sit $f : g = x : y$, ſeu $f : x = g : y$,
$g : h = y : z$, et $g : y = h : z$; erit ergo
$f : x = h : z$. Sed
$(f + g) : (x + y) = f : x$; hinc etiam
$f + g : x + y = h : z$; ſeu $f + g : h = x + y : z$; hinc

$(f+g)+h:h = (x+y+z):z$; ergo
$f+g+h:x+y+z = h:z = f:x = g:y$.

§. 253. Quodsi collata singula pro diverso tempore facta fuerint; illud collatum majorem partem lucri feret, quod longiori tempore exstat, et eo quidem majus lucrum dabit, quo diutius societati servit. Ergo lucrum singuli ita crescit, ut collatum simulque ut tempus quo durante pecunia in societate manet. Lucra igitur sunt in ratione composita ex rationibus directis collatorum et temporum. Si itaque unus consociatus a florenis per c menses x florenos lucratur, alterque b florenis per d menses y florenos; erit

a floren. : b floren. $= x:y$
c mens. : d mens. $=$

$ac:bd = x:y$. Sed etiam erit	Id est: usurae sunt in ratione composita capital. et temporum.

$ac+bd:ac = x+y:x$; et
$ac+bd:bd = x+y:y$; seu
$ac+bd:x+y = ac:x$, et
$ac+bd:x+y = bd:y$.

Idem valet, si plures adhuc consociati essent.

Si itaque quodvis collatum per suum tempus multiplicetur; erit summa horum productorum ad lucrum vel damnum commune, ut quodvis productum ad lucrum vel damnum correspondens singulum.

§. 254. In regula societatis simplici semper idem est tempus cujusvis collati; in composita, tempora non sunt eadem, sed diversa. Collatum ergo singulum per suum tempus est multiplican-

dum, ut collata propria inveniantur. Haec jam collata propria primum consummantur, et tum proportio haec: totum lucrum ad singulum lucrum, sicut totale collatum ad collatum singulum vel: summa collatorum ad totum lucrum, ut quodvis collatum ad quodvis lucrum singuli, toties repetitur, quot sunt singula collata. E. g. Detur hoc

Problema. *A* confert 500 fl. ad 2 annos
B confert 100 fl. ad 6 annos
C confert 360 fl. ad $\frac{1}{3}$ ann.

Lucrum commune sit 600 fl.; quaeritur lucrum cujusvis. Erit collatum

primi	$500 \times 2 =$	1000
secundi	$100 \times 6 =$	600
tertii	$360 \times \frac{1}{3} =$	120; ergo

collatorum summa = 1720. Estque

1) $1720 : 600 = 1000 : x$; seu
$43 : 15 = 1000 : x$, et
$$x = \frac{1000 \times 15}{43} = 348\tfrac{39}{43} \text{ fl.}$$

2) $43 : 15 = 600 : y$, et
$$y = 209\tfrac{13}{43} \text{ fl.}$$

3) $43 : 15 = 120 : z$, et
$$z = \frac{15 \times 120}{43} = 41\tfrac{37}{43} \text{ fl.}$$ Ergo

$x + y + z = 600$ florenis

Si omnes ad idem tempus contulissent, proportiones essent simplices; cum autem illi plus obvenire debeat, qui suam pecuniam diutius usuris permittit, rationes invicem componendae sunt, et

quia usurae sunt in ratione composita directa capitalium et temporum; collatum cujusvis consociati per suum tempus multiplicetur. Tum effertur

A confert $500 \times 2 = 1000$ fl.
B confert $100 \times 6 = 600$ fl.
C confert $360 \times \frac{1}{3} = 120$ fl.; hoc pacto collata ad idem tempus reducuntur; nam si *A* 500 fl. ad 2 annos confert, id idem est, ac si *A* 1000 flor. ad 1 annum conferret; et si *B* 100 fl. ad 6 annos conferrat, idem, ac si *B* 600 fl. ad 1 annum daret; ita etiam si *C* 360 fl. ad $\frac{1}{3}$ ann. confert, id tantundem est, ac si *C* 120 fl. ad 1 annum conferret. Jam totum novum collatum emergens est ad totum lucrum, sicut collatum singulum ad lucrum singuli. Haec proportio ter repetitur, et lucrum singulum invenitur.

E. *In Regula Alligationis vel Mixtionis.*

§. 255. Regulae societatis *Regula Alligationis vel Mixtionis* similis est; docet haec enim invenire, quantum de quavis materia simplici ad datam copiam mixtae accipiendum sit, si rationes simplicium datae fuerint. Consequenter simili etiam modo resolvitur. Proponatur v. g. sequens

Problema. Ut bonus pulvis pyrius obtineatur, ad 1 ℔ salis nitri accipiendae sunt 6 semiunciae carbonum, et 4 semiunciae sulphuris; seu 16 semiunciae salis nitri, 3 semiunciae carbon. et 2 semiunc. sulphur. dant mixtae pulverem pyrium probum; sint 1000 ℔ pulveris pyrii conficiendae; quantum de quavis specie esset accipiendum?

Resolutio. Sit $f = 16$ semiunc. sal. nitri
$g = 3$ sem. carbon.
$h = 2$ sem. sulphur.

Erit $f+g+h = 16+3+2 = 21$; et
$f+g+h:x+y+z = 21:1000$. Porro
$21:1000 = f:x = 16:761\frac{19}{21}$
$21:1000 = g:y = 3:142\frac{18}{21}$
$21:1000 = h:z = 2:95\frac{5}{21}$. Ergo

$x+y+z = 1000 = 761\frac{19}{21} + 142\frac{18}{21} + 95\frac{5}{21}$.

Coroll. 1) Quemadmodum ergo sunt
$21:1000 = 16:x$ sem. sal. nitri ℔
$21:1000 = 3:y$ ℔ carbonum
$21:1000 = 2:z$ ℔ sulphur. Id est:
Summa partium datarum est ad totum mixtum, sicut quaevis pars data, ad partem mixti quaesitam.

Coroll. 2) Quodsi rationes materiarum simplicium commiscendarum non dentur, sed potius quaeratur, qua ratione duae pluresve materiae commiscendae sint, ut pretium medium emergat; v. g. si caupo plura genera vinorum miscere vult; hae partes ipsae commiscendae prius erunt inveniendae, antequam mixtio fieri possit. Hujusmodi computationes alligationis, vel id genus problamata resolvuntur per aequationes methodo ibidem data.

Scholion. Regulam *falsi*, nec non regulam *coeci*, cum non sint verae regulae, sed merae tentationes, prorsus negligere potest Analysta.

Caput X.

De Progressione geometrica.

§. 256. *Progressio geometrica* est series numerorum paribus vicibus crescentium vel decrescentium. Numerus indicans, quoties (quot vicibus) termini majores vel minores fiant, appellatur *exponens* (Nenner) progressionis; et illi numeri naturales, qui sub terminos progressionis scribantur, ut indicent, quotus terminus quivis sit, vocantur *indices* (numeratores, Zeiger); *ultimus* determinat *numerum terminorum.*

Sit terminus primus = 2, et exponens = 2; erit progressio sequens:

$$\overset{1}{2},\ \overset{2}{4},\ \overset{3}{8},\ \overset{4}{16},\ \overset{5}{32},\ \overset{6}{64},\ \overset{7}{128},\ \overset{8}{256},\ \overset{9}{512}\ -\ -\ -\ -\ -$$

crescens vel *adscendens*.

Sit exponens $= \frac{1}{2}$; et terminus primus = 128; erit progressio sequens:

$$\overset{1}{128},\ \overset{2}{64},\ \overset{3}{32},\ \overset{4}{16},\ \overset{5}{8},\ \overset{6}{4},\ \overset{7}{2},\ \overset{8}{1},\ \overset{9}{\tfrac{1}{2}},\ \overset{10}{\tfrac{1}{4}},\ \overset{11}{\tfrac{1}{8}},\ \overset{12}{\tfrac{1}{16}},\ \overset{13}{\tfrac{1}{32}},\ \overset{14}{\tfrac{1}{64}}\ -\ -\ -\ -$$

decrescens vel *descendens*.

Sit generaliter terminus primus $= a$; communis exponens $= q$, et ultimus indicator $= n$; erit progressio sequens:

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{aq},\ \overset{3}{aq^2},\ \overset{4}{aq^3},\ \overset{5}{aq^4},\ \overset{6}{aq^5},\ \overset{7}{aq^6},\ \overset{8}{aq^7},\ \overset{9}{aq^8},\ \overset{10}{aq^9},\ \overset{11}{aq^{10}},\ \overset{12}{aq^{11}},\ \overset{13}{aq^{12}}\ -\ -\ -\ -\ -\ \overset{n}{aq^{n-1}}.$$

Coroll. 1) Ergo *quivis terminus* progressionis, vel $n$tesimus terminus aequalis est producto ex ter-

mino primo (a), in illam potentiam exponentis communis (q), cujus exponens (n—1), unitate minor eſt, quam index termini (n). Id eſt: omnis terminus aequalis eſt termino primo ducto in exponentem communem elevatum ad tantam potentiam quot termini ſunt dempta 1 unitate.

Coroll. 2) Terminus itaque ultimus vel w aequalis eſt aq^{n-1}, ſeu in *formula*

$$w = aq^{n-1}.$$

§. 257. *Theorema.* Quivis terminus progreſſionis geometricae eſt medius geometrice proportionalis inter quosvis duos in progreſſione ab illo aequidiſtantes terminos.

Demonſtratio. Sit enim aq^r quiscunque terminus progreſſionis geometricae; indicabunt aq^{r-s} et et aq^{r+s} quosvis terminos duos, qui ab illo in progreſſione aequidiſtant. Atqui $aq^{r-s} : aq^r = aq^r : aq^{r+s}$ conſtituunt proportionem geometricam continuam; in qua aq^r eſt medius proportionalis; ergo aq^r ſeu quivis terminus progr. geomet. eſt medius geom. proportionalis inter quosvis duos aequidiſtantes terminos.

Coroll. Quodſi igitur tres illae quantitates proportionis geom. continuae, terminos progreſſionis geom. conſtituant; ambo externi in progreſſione ſimul etiam a mediis aequidiſtabunt. Nam ſi fuerit

$$x : y = y : u, \text{ et}$$

$$x = aq^{r-s}$$

$$y = aq^r \text{ ; erit}$$

$$aq^{r-s} : aq^r = aq^r : u \text{ ; hinc}$$

$$u = aq^{r+s-r+s} = aq^{r+s}.$$

§. 258. *Theorema.* **Quilibet duo termini progressionis geometricae sunt in ratione directa cum quibusvis aliis duobus in progressione eadem ab invicem aequidistantibus terminis.**

Demonstratio. Sint enim aq^r et aq^{r+s} quicunque duo termini progressionis geometricae; erunt aq^m et aq^{m+s} quicunque duo alteri, qui ut illi a se aequidistant. Erit autem

$$aq^r : aq^{r+s} = aq^m : aq^{m+s}$$

proportio vera; ergo etc.

Coroll. 1) Quodsi igitur quantitates illae quatuor proportionis geometricae terminos progressionis geometricae constituant; postremi duo in progressione semper quoque pariter ab invicem distabunt, ut priores duo. Id est: si eadem sit utrobique majoris ad minorem ratio, eadem est et utrobique distantia.

Coroll. 2) Cum medius terminus in progressione imparis numeri terminorum ab ambobus extremis aequidistet; is terminus semper etiam est medius geometrice proportionalis inter eosdem, hinc quadratum illius aequale producto ex his.

Coroll. 3) Quodsi duo termini progressionis geometricae ab ambobus extremis aeque distent, etiam secundus ex his quatuor a primo aeque ut quartus a tertio distat; ergo constituunt proportionem geometricam. Igitur productum quorumvis duorum terminorum ab ambobus extremis aequidistantium, semper aequale est producto ex utroque extremo, ergo etiam aequale producto ex quibuscunque aliis duobus, iterum ab ambobus extremis aeque distantibus terminis.

Coroll. 4) Cum in omni progreſſione geometrica terminus 1mus ad 2dum, ſicut 2dus ad 3tium, ſicut 3tius ad 4tum, ſicut 4tus ad 5tum, et ita porro ſit; erit ratio 1mi (a) ad *n*teſimum terminum (aq^{n-1}) ex (n—1) aequalibus rationibus compoſita, ergo aequalis rationi potentiae (n—1)mae primi termini ad (n—1)mam potentiam termini ſecundi, ſeu aequalis rationi potentiae (n—1)mae cujusvis termini ad potentiam (n—1)mam proximae ſequentis. Seu erit

$$a : aq^{n-1} = (aq^p)^{n-1} : (aq^{p+1})^{n-1}.$$

§. 259. Summa omnium terminorum progreſſionis geometricae minus ultimo eſt ad ſummam omnium terminorum dempto primo, ſicut terminus 1mus ad 2dum, vel ſicut quivis terminus ad proxime ſequentem, vel ſicut 1 ad exponentem communem.

Demonſtratio. Cum rationes hae:

$a : aq$ $aq : aq^2$ $aq^2 : aq^3$ $aq^3 : aq^4$ $aq^4 : aq^5$ $aq^5 : aq^6$, et ita porro $aq^{n-2} : aq^{n-1}$	inter ſe aequales ſint; et in rationibus aequalibus ſumma antecedentium ad ſummam conſequentium ſit, ut quivis antecedens ad ſuum conſequentem; erit ſummando antecedentes et conſequentes:

$(a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 \cdots + aq^{n-2})$ ad $(aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 \cdots + aq^{n-1})$, ſicut $a : aq = aq : aq^2 = aq^2 : aq^3 = 1 : q$ (§. 206. et 205). Sed primus terminus proportionis hujus continet omnes terminos progreſſionis geo-

metricae demto ultimo, et terminus secundus ejusdem omnes terminos demto primo. Si itaque summa omnium terminorum exprimatur per S, ultimus terminus per w; erit ex hac proportione:

$(S-w):(S-a) = a:aq = aq:aq^2 = 1:q$. Id est $S-w:S-a = 1:q$; seu

Summa terminorum demto ultimo ad summam terminorum ablato primo, sicut unitas ad exponentem communem q. Q. E. D.

Coroll. Ex hac proportione $S-w:S-a = 1:q$ potest jam formula generalis pro summa omnium terminorum progressionis geometricae, vel aequatio Summae inveniri. Est enim $(S-w)q = S-a$, seu

$Sq-qw = S-a$; et $Sq-S = qw-a$; seu

$S(q-1) = qw-a$. Ergo $S = \frac{qw-a}{q-1}$. Et quia $w = aq^{n-1}$ (§. 256. Cor. 2.), substituto valore de w in valore de S; erit etiam

$$S = \frac{q \times aq^{n-1} - a}{q-1} = \frac{aq^{n-1+1} - a}{q-1} = \frac{aq^n - a}{q-1}$$

(§. 71.).

§. 260. Aequatio Summae vel pro S potest etiam hoc modo inveniri.

Exhibitio. Summa omnium terminorum, seu

$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 \ldots + aq^{n-1}$; totam aequationem hanc per q (exponentem) multiplicando, obtinetur

$Sq = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + aq^6 + aq^7 \ldots + aq^{n-1} + aq^n$. Si aequatio ſuperior ab inferiore ſubtrahatur; quivis terminus progreſſionis ſuperioris proxime praecedentem inferioris tollet, tantum a terminus primus ſuperioris, et aq^n ultimus inferioris remanebunt; hinc erit

$Sq - S = aq^n - a$. Igitur $S(q-1) = aq^n - a$; et

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

Et cum $w = aq^{n-1}$; erit etiam

$$S = \frac{qw - a}{q-1}.$$

§. 261. Formulae jam hic ſequentes habentur.

I. 1) $w = aq^{n-1}$; ex qua

2) $a = \dfrac{w}{q^{n-1}}$;

3) $q = \sqrt[n-1]{\left(\dfrac{w}{a}\right)}$.

4) $n = 1 + \dfrac{\log. w - \log. a}{\log. q}$ (Vid. §. 284.).

Ex aequatione termini ultimi itaque ſemper terminus primus et ultimus inveniri poteſt, cumprimum reliqui tres termini fuerint cogniti; exponens q et numerus terminorum n autem tunc, quando computationes Logarithmicae, et methodus altiorem radicem tertia extrahendi notae futurae ſint.

II. 1) $S = \frac{qw-a}{q-1}$, seu $Sq - S = qw - a$; ex hac

$a = qw - Sq + S$; seu

2) $a = qw - (q-1)S$;

3) $w = \frac{a + (q-1)S}{q}$; et

4) $q = \frac{S-a}{S-w}$.

Quodsi itaque tres ex his quantitatibus a, q, w et S datae fuerint; semper etiam quarta inveniri poterit.

Exemplum. Quidam equum suum juxta clavos soleares, venditurus postulat pro primo clavo 1 teruncium, pro secundo 2 teruncios, pro tertio 4 teruncios, pro 4to 8 teruncios, et pro quovis clavo semper duplum prioris. Quaeritur, quanti equus constaret, si 32 clavos soleares haberet?

Pretium hujus equi aequale est summae 32 terminorum progressionis geometricae, cujus primus terminus $=$ 1 teruncio, et exponens $=$ 2 (binario). Hinc quia $S = \frac{aq^n - a}{q-1}$; erit hic

$S = 2^{32} - 1$ (teruncii). Est autem

$2^9 = 512$

$2^9 = 512$; ergo

1024

512

2560

$2^{18} = 262144$

$2^9 = 512$; ergo

524288

262144

1310720

$2^{27} = 134217728$; et

$2^5 = 32$; ergo

268435456

402653184

$2^{32} = 4294967296$ (teruncii); hinc

$S = 2^{32} - 1 = 4294967295$ teruncii

$S = 1073741823\frac{3}{4}$ cruciferis. Et

$S = 17895697$ florenis, $3\frac{3}{4}$ cruciferis.

§. 262. *Coroll.* Quodsi exponens progressionis geometricae q minor 1 unitate, vel fractio sit; termini ejusdem continuo minores fiunt, et cum progressio in infinitum regrediatur (descendat), decrescunt supra omnes limites (fines) in se determinatos. Igitur in tali casu terminus ultimus seu ω

evanescit, seu w fit $=$ o. Et substitutione in valore de S facta, erit Summa seu

$$S = \frac{qw-a}{q-1} = \frac{o-a}{q-1} = \frac{-a}{q-1}; \text{ seu}$$

$Sq-S=-a$; et $a=S-Sq=(1-q)S$.

$$\text{Ergo } S = \frac{a}{1-q};$$

$$q = \frac{S-a}{S}.$$

Si itaque duae ex his tribus quantitatibus a, q, et S progressionis geometricae in infinitum decrescentis datae fuerint; semper etiam tertia inveniri poterit.

Sit E. gr. Progressionis infinitae terminus primus $= 1$, et exponens $= \frac{1}{2}$; erit Summa ejusdem seu $S = \frac{a}{1-q} = 1:(1-\frac{1}{2}) = 1:\frac{1}{2} = \frac{2}{1} = 2$.

Scholion. Posset Summa statim ex generali formula debita substitutione inveniri. Uti

$$S = \frac{qw-a}{q-1}, \text{ hic } = \frac{-1}{\frac{1}{2}-1} = -1:-\frac{1}{2} = +2.$$

§. 263. Aequatio Summae progressionis geometricae in infinitum decrescentis, cujus termini mutuo (alternando) positivi et negativi fiunt, invenitur hoc modo:

Exhibitio. Summa omnium id genus terminorum, seu

$S = a - aq + aq^2 - aq^3 + aq^4 - aq^5 + aq^6 - + - + -;$

multiplicando aequationem hanc per q; erit

$Sq = aq - aq^2 + aq^3 - aq^4 + aq^5 - aq^6 + aq^7 - + - + - +$

Si ambae aequationes adduntur; quivis terminus progressionis superioris proxime praecedentem inferioris in infinitum tollit; solum S, a et Sq restat; igitur erit

$S + Sq = a$; seu $(1 + q) S = a$; et

$S = \frac{a}{1+q}$; $q = \frac{a - S}{S}$.

Quodsi a aequale esset 1; esset $S = \frac{1}{1+q}$.

Caput XI.

De Logarithmis.

§. 264. *Logarithmi* dicuntur numeri progressionis arithmeticae subscripti numeris progressionis geometricae. Sit V. gr. progressio geometrica et progressio arithmetica, et terminus termino subscriptus:

$\frac{a}{q^4}$	$\frac{a}{q^3}$	$\frac{a}{q^2}$	$\frac{a}{q}$	a	aq	aq^2	aq^3	aq^4	etc.
$c - 4d$	$c - 3d$	$c - 2d$	$c - d$	c	$c + d$	$c + 2d$	$c + 3d$	$c + 4d$	etc.;

termini progressionis arithmeticae appellantur *Logarithmi*, et termini progressionis geometricae *Numeri horum Logarithmorum*. Ita $(c+d)$ erit Logarithmus numeri (aq), et $\frac{a}{q^2}$ erit numerus Logarithmi $(c-2d)$.

Est ergo Logarithmus terminus progressionis arithmeticae, qui termino progressionis geometricae respondet.

Logarithmi illi, qui semel jam assumpto et determinato valore numeri q, cuivis numero pertinent, conficiunt *Systema Logarithmicum*, et numerus q vocatur *basis* (Grundzahl) ejusdem.

Scholion. Nomen Logarithmi significat id, quod αϱιδμος λογων (numerus rationum); nam Logarithmus indicat, quoties ratio $1:q$ in reliquis $1:q^2$, $1:q^3$ etc. contenta sit.

§. 265. Quodsi inter quosvis duos numeros medius geometrice proportionalis, et inter logarithmos eorum medius arithmetice proportionalis quaeratur, ut $\frac{a}{q^{\frac{3}{2}}} : \frac{a}{q} = \frac{a}{q} : \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}}$; et $\frac{a}{q} : \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}} : a$;

et $\frac{a}{q^{\frac{1}{2}}} : a = a : aq^{\frac{1}{2}}$; et $a : aq^{\frac{1}{2}} = aq^{\frac{1}{2}} : aq$; etc.

Tum $\left(c - \frac{3d}{2}\right) - (c - d)$

$= (c - d) - \left(c - \frac{d}{2}\right)$; et

$(c - d) - \left(c - \frac{d}{2}\right) = \left(c - \frac{d}{2}\right) - c$; etc.

Sequentes duae progressiones inveniuntur:

$\frac{a}{q^{\frac{3}{2}}}, \frac{a}{q}, \frac{a}{q^{\frac{1}{2}}}, a, aq^{\frac{1}{2}}, aq, aq^{\frac{3}{2}}, aq^2 \ldots$ etc.

$c - \frac{3d}{2}, c - d, c - \frac{d}{2}; c, c + \frac{d}{2}, c + d, c + \frac{3d}{2}$

$c + 2d \ldots$ etc.

Quocunque ergo modo logarithmi assumpti fuerint; inter quosvis duos *numeros*, et eorum *logarithmos* secundum hanc methodum adhuc infinite multi numeri una cum eorum logarithmis inveniri poterunt.

§. 266. Cum termini progressionis geometricae semper positivi maneant, termini vero arithmeticae, $c - d$, $c - 2d$, $c - 3d$, vel $c - nd$, negativi fiant simul ac d, ergo et $2d$, $3d$, vel nd majus quam (c) fiat; perspicuum est: tum positivos, cum negativos Logarithmos semper ad *positivos numeros* tantum pertinere posse. Et quod ergo: *Logarithmi numerorum negativorum impossibiles sint.*

§. 267. Si quatuor numeri proportionem geometricam constituant; duo priores in progressione geometrica ita ab invicem distant, ut duo posteriores; hinc etiam Logarithmi duorum priorum

in progreſſione arithmetica mutuam a ſe diſtantiam, cum Logarithmis poſtremorum duorum, habent; igitur, hi quatuor Logarithmi conſtituunt proportionem arithmeticam. Et viciſſim, ſi 4 Logarithmi in proportione arithmetica conſtituti ſint, priores duo in arithmetica progreſſione ita a ſe invicem diſtant, ut poſteriores duo; ergo etiam numeri duorum priorum in geometrica progreſſione ita a ſe invicem diſtant, ut numeri poſtremorum duorum; hi numeri igitur conſtituunt proportionem geometricam.

Igitur quatuor numeri ſemper ſunt in proportione geometrica, cumprimum Logarithmi eorum in proportione arithmetica ſint: et cumprimum 4 numeri in proportione geometrica conſtituti fuerint; eorum Logarithmi dabunt proportionem arithmeticam. Id eſt: Si fuerit

log. a — log. b = log. c — log. d; ſemper etiam erit:

$$a : b = c : d$$

Et ſi fuerit $m : n = p : q$; ſemper quoque erit:

log. m — log. n = log. p — log. q.

§. 268. Si $a = 1$, et $c = o$ aſſumatur; progreſſiones illae generales in ſequentes permutantur:

$$\frac{1}{q^4},\ \frac{1}{q^3},\ \frac{1}{q^2},\ \frac{1}{q},\ 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ \text{etc.}$$

$$-4d,\ -3d,\ -2d,\ -d,\ o,\ d,\ 2d,\ 3d,\ 4d,\ \text{etc.}$$

Cumprimum ergo o (zerus) Logarithmus unitatis ſit; Logarithmi poſitivi pertinent ad numeros poſitivos, qui majores ſunt unitate, et Logarithmi

negativi ad numeros positivos, qui minores sunt quam 1, seu ad fractiones veras.

§. 269. *Problema.* Invenire Logarithmum Producti, quod V. g. sit pq.

Resolutio. Cum sit $1 : p = q : pq$; erit

$\log. 1 - \log. p = \log. q - \log. pq$ (§. 267.); et

$\log. pq = \log. p + \log. q - \log. 1.$ (§. 187.).

Igitur, quia $\log. 1 = 0$ (§. 268.); est

$\log. pq = \log. p + \log. q.$

Logarithmus producti itaque aequalis est summae Logarithmorum factorum suorum.

Hinc etiam erit $\log. pqrs = \log. p + \log. q + \log. r + \log. s.$

§. 270. Sit quaerendus Logarithmus fractionis seu Quoti $\frac{p}{q}$. Sit $\frac{p}{q} = x$; erit $p = qx$; et cum aequales numeri aequales habeant Logarithmos, est: $\log. p = \log. px = \log. q + \log. x$; et

$\log. p - \log. q = \log. x.$ Ergo ob $x = \frac{p}{q}$;

$$\log. \frac{p}{q} = \log. p - \log. q.$$

Logarithmus igitur *fractionis* aequalis est Logarithmo numeratoris minus Logarithmo denominatoris, seu *Logarithmus Quotientis* aequalis Logarithmo dividendi dempto Logarithmo divisoris.

§. 271. *Problema.* Invenire Logarithmum potentiae cujuspiam quantitatis.

Resolutio. Cum $x^2 = xx$; et log. $x^2 =$ log. xx $=$ log. $x +$ log. $x = 2$ log. x; erit

log. $x^3 = 2$ log. $x +$ log. $x = 3$ log. x;

log. $x^4 = 3$ log. $x +$ log. $x = 4$ log. x;

log. $x^5 = 4$ log. $x +$ log. x; et generaliter

log. $x^n =$ n. log. x. Igitur

Logarithmus cujuslibet potentiae quantitatis cujuspiam aequalis eſt Logarithmo, quantitatis ducto in exponentem potentiae. Unde erit

log. $x^1 = 1 .$ log. $x =$ log. x.

Log. $x^0 = 0 \times$ log. $x = 0$.

Logarithmus de x^0 aequalis zero; igitur numerus huic Logarithmo correſpondens $= 1$, et igitur $x^0 = 1$.

§. 272. *Problema.* Invenire Logarithmum cujuslibet radicis quantitatis cujuspiam.

Resolutio. Cum $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ (§. 77.); et

$$\log. \sqrt[n]{x} = \log. \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n} . \log. x = \frac{\log. x}{n}$$

(§. 271.);

erit etiam log. $\sqrt[n]{x} = \dfrac{\log. x}{n}$. Hinc

Logarithmus cujusvis radicis quantitatis cujuspiam aequalis eſt Logarithmo quantitatis diviſo per exponentem radicis (radicalem).

Ita log. $\sqrt[3]{x} = \frac{\log. x}{3}$; log. $\sqrt[4]{a} = \frac{\log. a}{4}$.

Log. $\sqrt[5]{a} = \frac{\log. a}{5}$.

§. 273. Sit $d = 1$; et $q = 10$; progressiones praecedentes permutantur in sequentes:

$\frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{10^3}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^1}$, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, etc.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 etc. Seu

10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4 etc.

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Hinc: *Quivis numerus aliqua potentia* exponentis communis (progressionis), et ejus *Logarithmis* semper exponens hujus potentiae est.

Unde etiam intelligitur, *Logarithmos quantitatum esse exponentes earumdem quantitatum.*

Tales sunt logarithmi ii, de quibus Clariss. Dom. Euler. affirmat, quod, si b sit quantitas constans, et $b^q = c$; q sit Logarithmus numeri c. Nam cum q sit Logarithmus de b^q; erit etiam q Logarithmus istius c, cum primum c aequale sit b^q.

§. 274. Progressiones praecedentes etiam hoc modo repraesentari possunt:

$\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10}$, 1, 10, 100, 1000, 10000,
-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, etc.

Hac ratione Logarithmi pro potentiis decenarii determinati, et secundum hanc determinationem posthac etiam Logarithmi reliquorum numerorum calculati fuerant.

Inventor Logarithmorum, qui primus Systema Logarith. calculo subjecit. erat Ioann. Neper. L. B. a Merchiston, Scotus, quod ille Ann. 1614. Edimburgae sub titulo: *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria et omni Logistica mathematica explicatio*, edidit, quamvis jam *Michael Stiefel*. Ideam veram Logarithmorum habuerit, ut ex sua *Arithmetica integra*. Norimb. 1544. Libr. I. Cap. IV. VI. et Libr. III. Cap. V. apparet.

Videamus jam, quomodo haec Calculatio praestari potuerit.

§. 275. Logarithmus unitatis, seu log. $1=0$; log. $10=1$. Sed inter 1 et 10 existunt adhuc 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, et st, unacum copia fractionum. Log. $100=2$; at inter. 10 et 100 sunt omnes numeri a decenario usque ad 99 cum fractionibus adhaerentibus. Log. de $\frac{1}{10}=-1$; et log. $\frac{1}{100}=-2$: verum inter hos adhuc infinite multae fractiones existunt. Qua ratione jam Logarithmi horum intermediorum numerorum potuerant inveniri?

Postquam logarithmus unitatis et logarithmus decenarii inventi erant, inveniebantur logarithmi numerorum inter 1 et 10 jacentium, et singulatim quidem investigandi erant logarithmi numerorum 2, 3, 5, 7: nam logarithmi numerorum 4, 6, 8 et 9 facile inveniri possunt, prioribus jam inventis.

Cum autem Logarithmus numeri 10 primum $= 1$, id eſt unitati integrae, et ille unitatis $= 0$, id eſt $=$ nulli integrae unitati ſit; jam per ſe patet, logarithmos numerorum 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et fractionum adhaerentium nullos integros numeros continere poſſe, ſed tantum partes unitatis. Hae partes unitatis, vel fractiones vero in decimalibus expreſſae fuerant, quia etiam in tabulis logarithmicis geometrica progreſſio numerorum juxta ſeriem decadicam aſſumpta eſt, utpote accommodatiſſima.

Si inter duos numeros medius geometrice proportionalis, et inter logarithmos eorumdem medius arithmetice proportionalis quaeratur; hic ſemper eſt logarithmus illius (§. 265.). Quodſi igitur logarithmi numeri dati inveniendi cauſſa medius geometrice proportionalis numerus inter proxime majorem et proxime minorem ex numeris illis, quorum logarithmi jam cogniti (inventi) ſint, et inter eorum logarithmos medius arithmetice proportionalis quaeratur; invenientur logarithmi numerorum, qui dato continue minus differunt.

Ita pro inveniendo logarithmo binarii ſequens calculus inſtituendus:

Sit x medius proportionalis ad 1 et 10; erit $1 : x = x : 10$; et $x^2 = 10$. Ergo $x = \sqrt{10}$.
$\sqrt{10} = 3,1622776610$; verum
Log. 1 — log. $x =$ log. x — log. 10 (§. 267.), et
2 log. $x =$ log. 10 (§. 271.); ergo ob log. $x = 1$;
Log. $x = \frac{1}{2}$ log. 10 $= \frac{1}{2} = 0,5$. Seu

I. Log. 3, 1622776601 $= 0,5$.

Sit y medius proportionalis ad 1 et x; erit

$$1 : y = y : x; \text{ et}$$

$y = \sqrt{x} = \sqrt{(3,1622776601)}$, seu

$y = 1,7782794100$. Verum

$$\text{Log.}\, y = \frac{\log. x + \log. 1}{2} (\S.\ 267.) = \frac{0,5+0}{2};$$

$$\log.\, y = 0,25. \text{ Ergo}$$

II. Log. $1,7782794100 = 0,25$.

Sit z medius geometr, proportionalis ad y et x; erit $y : z = z : x$; et $z = \sqrt{xy}$; seu

$z = \sqrt{(3,1622776601 \times 1,7782794100)}$; seu

$z = 2,3713737056$. Sed

$$\text{Log.}\, z = \frac{\log. x + \log. y}{2} = \frac{0,5+0,25}{2} = \frac{0,71}{2} =$$

$0,375$; hinc

III. Log. $2,3713737056 = 0,375$.

Si hoc modo computatio ulterius continuetur; invenietur demum logarithmus numeri, qui jam a binario nec $\frac{1}{10000000}$ (una decimillionesima) parte differt, qui ergo omnino tanquam logarithmus numeri 2 ipsius assumi potest, quin hoc pacto error aliquis in praxi oriatur.

§. 276. Invento jam hac methodo logarithmo binarii. facile inveniuntur:

1) Logarithmus de 4, 8, 16, et omuium numerorum, qui ut potentia aliqua binarii, aut tanquam productum ex binario, et numero illo, cujus logarithmus notus sit, spectari possunt; nam

$\log. 4 = \log. 2^2 = 2 \log. 2$;
$\log. 8 = \log. 2^3 = 3 \log. 2$; et ita porro.

2) Logarithmi fractionum earum, quarum numerator et denominator 1, 2, 10, vel potentia de 1, 2, 10, aut productum ſit, quod ex his factoribus erat ortum.

Hac methodo calculabantur etiam logarithmi numerorum 3, 5, 7, et generatim omnium numerorum primorum, et ex his tunc logarithmi pro reliquis numeris omnibus, cum omnes hi producta ex illis ſint.

§. 277. Logarithmi pro omnibus numeris integris ab 1 uſque 100000 jam actu calculati, et et in ſic dictas tabulas (libellis) logarithmorum numerorum naturalium compoſiti (digeſti) exiſtunt.

Pleraeque autem tantum uſque 10000 exſtant, et in nulla earumdem logarithmi fractionum calculati dantur.

Debemus itaque *uſum* hujusmodi tabularum monſtrare, ut ope earumdem logarithmus cujusvis numeri, et numerus cujuslibet logarithmi inveniri poſſit.

§. 278. Eſt ergo

Log. 1 $=$ 0	Log. $\frac{1}{10}$ $= -1$
Log. 10 $=$ 1	Log. $\frac{1}{100}$ $= -2$
Log. 100 $=$ 2	Log. $\frac{1}{1000}$ $= -3$
Log. 1000 $=$ 3	Log. $\frac{1}{10000}$ $= -4$
Log. 10000 $=$ 4	Log. $\frac{1}{100000}$ $= -5$
Log. 100000 $=$ 5	etc.
etc.	

Hi logarithmi accurate determinati, logarithmi reliquorum numerorum vero per approximationem inventi erant. Logarithmi numerorum inter 1 et

10 intercedentium, nullum integrum; ſed meros decimales continent; logarithmi numerorum ab 10 uſque 100 habent unum integrum atque tot decimales, ut approximatio ducatur (vulgo 7 decimales); logarithmi numerorum a 100 uſque 1000 continent duo integra una cum decimalibus; logarithmi numerorum a 1000 uſque 10000 continent 3 integra cum decimalibus; logarithmi numerorum a 10000 uſque ad 100000 continent 4 integra cum adjunctis decimalibus; et ita porro.

Omnis ergo logarithmus pro integris 1 unitate minus obtinet, quam ejus numerus continet notas. Poteſt igitur determinari, quot integra logarithmus numeri dati (reſpondens) habere debeat; et viciſſim ex integris logarithmi dati cognoſcitur, quot cyfras numerus logarithmo huic reſpondens continere debeat.

Numerus integrorum, ex quibus omnis logarithmus conſtat, dicitur *characteriſtica ejusdem*, et decimales adjunctae dicuntur *mantiſſa*.

Si igitur numerus datus *n cyfris* conſtet, characteriſtica ejus logarithmi eſt $(n-1)$; et ſi characteriſtica logarithmi cujuspiam *n ſit*; numerus ejusdem conſtat $(n+1)$ cyfris vel notis.

§. 279. *Ope tabulae logarithmorum*, quae numerum 10000 non excedat, ut illa ab *A.* Vlacq, *invenire logarithmum omnis Numeri dati.*

Reſolutio. 1) Si numerus datus ſit numerus integer infra 10000 (minor quam 10000); invenitur ejus logarithmus in tabulis ipſi adpoſitus. Ita eſt log. $84 = 1,9242793$; et log. $9999 = 3,9999566$; et ita porro.

2) Quod si datus numerus fractus i. e. fractio fuerit, cujus numerator et denominator minores quam 10000 sint; obtinetur ejus logarithmus, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahatur. V. g. sit investigandus lologarithmus numeri fracti $\frac{48}{720}$. Erit

log. 48 = 1, 6812412, et
log. 720 = 2, 8573325 Subtracto

— 1, 1760913 = log. $\frac{48}{720}$.

3) Si fractio mixta data sit, vel si numero dato adhuc fractio adhaereat; integra et fractio (totus numerus) ad eundem denominatotem reducuntur, tum in tabula logarithmus denominatoris quaeritur, subduciturque a logarithmo numeratoris. Dummodo in hoc casu numerator tabulam non excedat. Sit logarithmus numeri $79\frac{15}{32}$ determinandus.

Erit $79\frac{15}{32}$ = $\frac{2543}{32}$, et
log. 2543 = 3, 4053464;
log. 32 = 1, 5051500 subtrahendo; erit

log. $79\frac{15}{32}$ = 1, 9001964.

Sit logarithmus numeri decimalis 87, 34 inveniendus. Erit 87, 34 = $\frac{8734}{100}$; et ergo

log. 8734 = 3, 9412132
log. 100 = 2, 0000000, subtrahendus; ergo

log. 87,34 = 1, 9412132.

Sit inveniendus logarithmus de 0, 2367,
Quia 0, 2367 = $\frac{2367}{10000}$, et

log. 2367 = 3,3741983
log. 10000 = 4,0000000 ; ſubtrahendo erit

log. 0,2367 = — 0,6258017.

4) Si numero dato fractio adhaereat, et fractio haec mixta jam in puram converſa fuerit, numerator poſthac tamen tabulam excedat, vel major quam 10000 fiat; ſequenti modo proceditur. Differentiae numerorum cum differentiis logarithmorum eorum ut proportionales quantitates ſpectantur, ſequensque proportio inducitur: *Differentia numeri proxime majoris et proxime minoris dato, eſt ad differentiam numeri medii (dati) et proxime minoris, ſicut differentia proxime majoris et proxime minoris logarithmi ad differentiam logarithmi medii et proxime minoris.* Haec differentia logarithmi medii et proxime minoris inventa tum ad proxime minorem logarithmum additur, et hac ratione obtinetur logarithmus numeri dati.

Proportio iſthaec vera quidem non eſt, cum differentiae numerorum nequaquam ad invicem ſint, ut differentiae logarithmorum eorum. Interea tamen haec proportio in numeris, qui ab invicem meris fractionibus differunt, approximationem praxi ſatisfacientem procurrat.

Sit inveniendus logarithmus $4643\frac{17}{49}$.

Si fractio et integra ad eundem denominatorem reducerentur; numerator tunc tabulam ſuperaret.

Verum $4543\frac{17}{49}$ intercedit inter 4543 et 4544.

Hinc, differentia numeri proxime majoris et proxime minoris = 1;

differentia numeri medii et proxime minoris $= \frac{17}{49}$; et

log. 4544 = 3,6574383
log. 4543 = 3,6573427; eorum

differentia = 956.

Igitur $1 : \frac{17}{49} = 956 : x$; et

$$x = \frac{17 \times 956}{49} = 331.$$

Sed log. 4543 = 3,6573427: ergo addendo
x = 331

erit log. $4543\frac{17}{49}$ = 3,6573758.

Sit inveniendus logarithmus de 9740,653.

Erit log. 9741 = 3,9886035
log. 9740 = 3,9885590; et eorum

differentia = 445; ergo

$$1 : \frac{653}{1000} = 445 : \frac{653 \times 445}{1000}; \text{ seu}$$

$$1 : \frac{653}{1000} = 445 : 259. \quad \text{Sed}$$

log. 9740 = 3,9885590; ergo addendo

log. 9740,653 = 3,9885869.

5) Si denique numerus datus major sit quam 10000; is in duos factores distinguitur ita, ut unus factor quatuor altissimas notas numeri dati ut integra, et reliquas pro decimalibus contineat, alter tunc vero semper ex 1 et tot zeris constet, quot ille decimales cyfras habet. Deinde quaeruntur logarithmi horum numerorum duorum,

adduntarque, ſumma eorum dat logarithmum numeri dati. Ut:

Sit inveniendus logarithmus numeri 58723.

Erit $58723 = 5872,3 \times 10$; et
log. $5873 = 3,7688600$
log. $5872 = 3,7687860$; eorum

differentia $= 740$; hinc

$$1 : \frac{3}{10} = 740 : \frac{3 \times 740}{10} = 740 : 222.$$

Sed log. $5872 = 3,7687860$; addendo

log. $5872,3 = 3,7688082$; et
log. $10 = 1,0000000$; ergo

log. $58723 = 4,7688082$.

Ponendo $58723 = 587,23 \times 100$, et quaerendo logarithmos horum amborum factorum poſſet etiam logarithmus 58723 inveniri.

Sit inveniendus logarithmus de 2134567,892.

Erit $2134567,892 = 2134,567892 \times 1000$; et
log. $2135 = 3,3293979$
log. $2134 = 3,3291944$; eorumque

differentia $= 2035$; ergo

$$1 : \frac{567892}{1000000} = 2035 : \frac{567892 \times 2035}{1000000}$$
$$= 2035 : 1155;$$ ſed

log. $2134 = 3,3291944$; addendo erit

log. $2134,567892 = 3,3293099$; et
log. $1000 = 3,0000000$; additis erit

log. $2134567,892 = 6,3293099$.

Quodsi numerus tabulam excedens in factores distribui queat, qui tabulam amplius non excedant et numeri integri sint; ejus logarithmus multo facilius invenitur, si logarithmi horum factorum addantur. Ut:

Sit inveniendus logarithmus numeri 50769.

Erit $50769 = 5641 \times 9$; et

log. 5641 = 3,7513561;
log. 9 = 0,9572425, additis est

log. 50769 = 4,7085986.

Sit inveniendus logarithmus 480000. Erit

$480000 = 480 \times 1000$; et

log. 480 = 2,6812412
log. 1000 = 3,0000000; additi dant

log. 480000 = 5,6812412.

Vel ponendo $480000 = 48 \times 10000 = 4800 \times 100$; etc.

§. 280. *Ope tabulae logarithmorum pro numeris ab 1 usque ad 10000, numerum cujusvis logarithmi dati invenire.*

Resolutio. 1) Quodsi logarithmus datus minor 4 integris, ergo in tabula contentus fuerit; ejus numerus (respondens illi) appositus in tabulis habetur.

Sit inveniendus (exscribendus e libello) numerus logarithmi = 3,6880637.

Cum logarithmus datus 3 integra contineat, numerus huic logarithmo respondens 4 notas continere debet, quare inter millia quaerendus erit, inveniturque esse 3,6880637 = log. 4876.

2) Quando logarithmus datus minor quidem 4 integris est, in tabula tamen non sit contentus; hoc indicio est, quod numero huic logarithmo respondenti fractio adhaereat.

Hoc in casu iterum differentiae logarithmorum cum differentiis numerorum eorumdem tanquam proportionales assumendae sunt. Proportio autem instituenda haec est: *Ut se habet differentia proxime majoris et proxime minoris logarithmi ad differentiam medii et proxime minoris logarithmi, ita se habet differentia proxime majoris et proxime minoris numeri, ad differentiam numeri medii et proxime minoris.* Haec differentia (numeri medii vel dati et proxime minoris) ad proxime minorem numerum addita, dat numerum logarithmi dati quaesitum. Ut:

Sit inveniendus numerus logarithmi hujus: 2,9378624. Hic logarithmus in tabula non reprehenditur. Sed logarithmus proxime major

= 2,9380191;
proxime minor = 2,9375179 = log. 866; et eorum differentia = 5012;

medius = 2,9378624 (semper datus)
proxime minor = 2,9375179; eorum
differentia = 3445; estque

differ. logarithm.

$$5012 : 3445 = 1 : \frac{3445}{5012} = 1 : 0{,}687.$$

Atqui 2,9375179 = log. 866; hinc
2,9378624 = log. 866,687.

3) Si logarithmus datus major sit 4 integris; spectandus erit tanquam summa duorum logarith-

morum, quorum unus ex tribus integris et omnibus decimalibus (fractionibus vel mantiſſa) conſtat, quas datus contineat, alter vero ex reliquis integris dati. Tum quaeruntur numeri horum duorum logarithmorum, multiplicanturque inter ſe, ubi numerus logarithmo dato reſpondens invenitur. V. g.

Sit inveniendus logarithmo: 6,7533532 reſpondens numerus. Erit

6,7533532 = 3,7533532 + 3,0000000.
Et 3,7533532 = log. 5667,
3,0000000 = log. 1000; ergo
6,7533532 = log. (5667 × 1000) = log. 5667000.

Sit inveniendus reſpondens numerus logarithmo: 5,7543867. Eſt

5,7543867 = 3,7543867 + 2,0000000;
proxime major = 3,7544248
proxime minor = 3,7543483 = log. 5680;

eorum differentia = 765. Tum
medius = 3,7543867
prox. min. = 3,7543483; et eorum

differentia = 384; adeoque

$$765 : 384 = 1 : \frac{384}{765} = 1 : 0,501.$$

Verum 3,7543483 = log. 5680; igitur
3,7543867 = log. 5680,501; et
2,0000000 = log. 100; quare

5,7543867 = log. (5680,501 × 100) = log. 568050,1.

4) Si denique logarithmus datus sit negativus, hoc indicio est, numerum huic logarithmo respondentem esse fractionem veram, vel minorem unitate. In hoc casu logarithmo dato tot integra adduntur, quot requirantur, ut positivus fiat; tum istius summae numerus respondens quaeritur, dividiturque rursus per 1 cum tot zeris, quot unitates logarithmo negativo fuerint additae. V. g.

Sit logarithmo: —0,1247388 respondens numerus inveniendus. Erit

1,0000000 = log. 10
—0,1247388 = dato; eorum summa est =

0,8752612. Talis in tabula non habetur. Ergo

proxime major = 0,9030900
proxime minor = 0,8450980 = log. 7. Et

eorum differentia = 0,0579920. Porro

medius = 0,8752612
proxime minor = 0,8450980; eorumque

differentia = 0,0301632; ergo

$$579920 : 301632 = 1 : \frac{301632}{579920} = 0,511$$

At 0,8450980 = log. 7; hinc

0,8452612 = log. 7,5; consequenter

$$—0,1247388 = \text{log.} \left(\frac{7/5}{10} = \frac{75}{100} = \right.$$

$$\text{log. } 0,75 = \text{log.} \left(\frac{3}{4}\right).$$

§. 281. Cum $\log.\left(\frac{1}{a}\right) = \log. 1 - \log. a$ $= - \log. a.$

Invenitur ergo etiam numerus $\frac{1}{a}$ respondens logarithmo negativo ($-\log. a$); si unitas per a (numerum ejusdem positivi logarithmi $+ \log. a$) dividatur. Unde esset $-\log. b = \log. 1 - \log. b =$ $\log.\left(\frac{1}{b}\right)$. Consequenter numerus respondens illi logarithmo:

$-0{,}1247388$ etiam hoc modo inveniri poterit:

proxime major $= 0{,}3010300$
proxime minor $= 0{,}0000000 = \log. 1.$

differentia $= 0{,}3010300$. Porro

medius $= 0{,}1247388$
prox. minor $= 0{,}0000000$; eorumque

differentia $= 0{,}1247388$; erit ergo

$$3010300 : 1247388 = 1 : \frac{1247388}{3010300} = 1 : 0{,}419.$$

Atqui $0{,}0000000 = \log. 1$; itaque
$+ 0{,}1247388 = \log. 1{,}419$. Ergo

$$-0{,}1247388 = \log.\left(\frac{1}{1{,}419}\right) = \log.\left(\frac{1000}{1419}\right).$$

§. 282. Quodsi desideretur, ut numerus $\frac{1}{a}$ respondens logarithmo negativo datum denomi-

natorem *ab* quemcunque habeat; hic apprime in eo res consistit, ut fractionis istius $\frac{b}{ab} = \frac{1}{a}$ inveniatur numerator *b*.

At log. b = log. ab—log. a.

Invenitur ergo logarithmus respondens numeratori fractionis quae datum denominatorem habeat, et numerus dati logarithmi cujuspiam sit; si idem logarithmus positive sumptus a logarithmo denominatoris dati subducatur. V. g.

Sit inveniendus ipsi (—0,1247388) numerus respondens, qui pro denominatore habeat 64. Erit

log. 64 = 1,8061800, et datus positive sumptus
= 0,1247388; subductis erit

differ. = 1,6814412 = log. 48.

Idcirco —0,1247388 = —log. 64 + log. 48

$$= \log. \left(\frac{48}{64}\right) = \log. \left(\frac{3}{4}\right).$$

§. 283. Invenitur itaque *adjuvante tabula logarithmorum* (ab 1 usque ad 10000):

1) *Quodvis productum*, si logarithmi factorum adduntur, et tum numerus summae eorumdem quaeritur.

2) *Quivis quotiens*, si logarithmus divisoris (denominatoris) a logarithmo dividendi (numeratoris) subducitur, et numerus huic summae respondens quaeritur.

3) *Quaelibet dignitas* numeri dati cujuspiam, si logarithmus numero respondens in exponentem dignitatis ducitur, et numerus huic producto respondens quaeritur.

4) *Quaelibet radix* numeri dati cujuspiam, si logarithmus dato numero respondens per exponentem radicis dividitur, et numerus huic quoto respondens quaeritur.

5) Ope logarithmorum possunt et aequationes resolvi, in quibus quantitas incognita ut exponens potentiae vel radicis occurrat.

Scholion. Loco multiplicationis quantitatum intercedit additio logarithmorum earum, et vice divisionis earum, mera subtractio logarithmorum earumdem; qua ratione ergo in plerisque casibus calculus admodum levatur.

Ceterum, quod doctrina Logarithmorum in Trigonometria et in scientiis ab hac dependentibus necessaria sit, nulla eget probatione.

Caput XII.

Applicatio doctrinae Logarithmorum ad resolvenda nonnulla problemata difficiliora.

§. 284. Invenire ex aequatione $a^x = q$, quantitatem incognitam x.

Resolutio. Log. $(a^x) =$ log. q; seu

x. log. a $=$ log. q; hinc

$$x = \frac{\text{log. q}}{\text{log. a}}.$$

Invenire x ex aequatione : $\sqrt[x]{a} = q$.

Resolutio. $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$; et

$$\log.\ a^{\frac{1}{x}} = \log.\ q.\quad \text{Ergo}$$

$$\frac{\log.\ a}{x} = \log.\ q;\ \text{seu}$$

$$\log.\ a = x.\ \log.\ q.\quad \text{Hinc}\ \frac{\log.\ a}{\log.\ q} = x.$$

Extrahere radicem cubicam ex numero $= 2197$.

Resolutio. $\text{Log.}\ \sqrt[3]{(2197)} = \dfrac{\log.\ 2197}{3}$;

$\log.\ 2197 = 3{,}3418301$, et

$$\frac{3{,}3418301}{3} = 1{,}1139433 = \log.\ 13;\ \text{inde}$$

$$\sqrt[3]{(2197)} = 13.$$

Invenire ex aequatione $w = aq^{n-1}$ pro termino ultimo progressionis geometricae (§. 261.) etiam q et n.

Resolutio. Ex $aq^{n-1} = w$; erit

$$q^{n-1} = \frac{w}{a};\ \text{et}$$

$$(n-1)\ \log.\ q = \log.\ w - \log.\ a.\quad \text{Unde}$$

$$\log.\ q = \frac{\log.\ w - \log.\ a}{n-1}.\quad \text{Atque}$$

$$n-1=\frac{\log. w-\log. a}{\log. q};\ \text{ergo}$$

$$n=1+\frac{\log. w-\log. a}{\log. q}.$$

§. 285. *Problema.* Quidam permittit societati cuipiam a florenos per n annos pro p usuris per 1 centum, ea conditione, ut quovis anno elapso usurae iterum Capitali addantur. Ad quot florenos accrescet Capitale elapsis post n annis?

Resolutio. Cum 100 flor. per 1 annum dent (100+p) florenos; dabunt a flor. primo anno $\left(\frac{100+p}{100}\right)$ a florenos. Est enim $100:100+p$ $=a:\left(\frac{100+p}{100}\right)a.$

Hi $\left(\frac{100+q}{100}\right)a$ fl. dant an. 2do $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a$ fl.

Hi $\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a$ fl. dant an. 3tio $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a$ flor.

Et hi $\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a$ fl. dant an. 4to $\left(\frac{100+p}{100}\right)^4 a$ fl.

Et $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} a$ flor. dant anno ntesimo $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} a$ flor.

Igitur Capitale per n annos accummulatum seu $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$ florenis.

Ex hac generali formula potest jam sive n, sive a, sive p, sive x, dum reliqua dantur, inveniri.

Exemplum. 1) Dom. T. dedit mihi aureum ea conditione, ut usuram annuam (4 flor. pro Centum) semper ad capitale augendum conferam. Quot florenos illi mei haeredes elapsis post 100 annis solvere debebunt?

Resolutio. $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$ florenis.

Debite substituendo erit hic $x = \left(\frac{104}{100}\right)^{100} \times \frac{9}{2}$ flor.; et

$\log. x = (\log. 9 - \log. 2) + 100(\log. 104 - \log. 100)$.

At log. 9 = 0,9572425
log. 2 = 0,3010300

different. = 0,6562125 = log. 9 — log. 2.

Log. 104 = 2,0170333
log. 100 = 2,0000000

different. = 0,0170333 = log. 104 — log. 100; et per 100 multiplicata, dat 001,7033300; seu 1,7033300 = (log. 104 — log. 100) × 100.

Ergo log. x = 0,6562125 + 1,7033300; seu log. x = 2,3595425.

Logarithmus hic in tabula non habetur. Sed

proxime major $=$ 2,3598355

proxime minor $=$ 2,3579348; eorum

differentia $=$ 18007; et

medius $=$ 2,3595425

prox. minor $=$ 2,3579348 $=$ log. 228;

differentia $=$ 16077; hinc

$18007 : 16077 = 1 : \frac{16077}{18007}$; ergo

$2,3595425 = \log. 228,\frac{16}{18}$ florenis; seu

$x = 228\frac{8}{9}$ flor.

Exemplum. 2) Capitale 1000 flor. usuris datur, 4 flor. usura annua pro 100; quot annis efficiet hoc capitale 40000 flor., si usurae annuae quovis anno Capitali addantur?

Resolutio. $x = \left(\frac{100 + p}{200}\right)^n a$ flor. Debite substitutis erit hic $x = \left(\frac{104}{100}\right)^n \times 1000 = 40000$; et

$$\left(\frac{104}{100}\right)^n = 40.$$ Igitur

n (log. 104 — log. 100) $=$ log. 40; ergo

$$n = \frac{\log. 40}{\log. 104 - \log. 100};$$ seu cum

log. 40 $=$ 1,6020600; et

log. 104 — log. 100 $=$ 0,0170333:

$$n = \frac{1,6020600}{0,0170333} = 94 \text{ annis.}$$

§. 286. *Problema.* Cajus deponit *a* florenos usuris dandos erga censum annuum 4 flor. pro 100,

ac non solum usuras semper iterum Capitali addit, sed praeterea adhuc Capitale suum per summam b auget. Quot florenos efficit Capitale totum elapsis post n annis?

Resolutio. Capitale hoc uno anno crescit ad

$\left(\frac{100+p}{100}\right)^1 a + b$ flor.; duobus annis ad

$\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^1 b + b$; ita enim

hic investigatur: 100 dant $(100+p)$, quot dabunt

$\left(\frac{100+p}{100}\right)^1 a + b$? Vel sequens proportio ponitur:

$100 : \left(\frac{100+p}{100}\right) a + b = (100+p)$: quartum; hic

quartus proportionalis est $=$

$\left(\frac{(100+p)}{(100)} a + b\right)\left(\frac{100+p}{100}\right) =$

$\left(\frac{100+p}{100}\right)^2 a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^1 b$; cui adhuc b

addi debet, ut Capitale duobus annis accrescens obtineatur. Ex eodem fundamento Capitale accrescit tribus annis ad

$\left(\frac{100+p}{100}\right)^3 a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^2 b + \left(\frac{100+p}{100}\right)^1 b$

$+ b$; quatuor annis ad $\left(\frac{100+p}{100}\right)^4 a +$

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^{3} b + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{2} b + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{1} b$$

$+ b$; et ita porro. Ergo (n annis) accrescit Capitale ad

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} b +$$

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-2} b + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-3} b +$$

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-4} b \cdots + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{1} b + b.$$

Elapsis ergo post n annis Capitale hocce constat 1mo) ex $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n}$ a florenis, et 2do) ex summa omnium terminorum progressionis sequentis: b, $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{1}$ b, $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{2}$ b, $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{3}$ b, $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{4}$ b, $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{5}$ b, - - - - - - - - - - $+\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1}$ b. Scilicet termini inverso ordine scripti sunt, et loco (n—2), (n—3), (n—4) - - - exponens potentiae determinate expositus est.

Verum (§. 259. Coroll.) erat $S = \frac{qw - a}{q - 1}$.

Cum hic ultimus terminus seu $w = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1}$ b,

communis exponens seu $q = \frac{100+p}{100}$, primus terminus seu $a = b$; erit hic debite substituendo valores, summa omnium terminorum, seu

$$S = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{1} \times \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n-1} b - b}{\frac{100+p}{100} - 1}, \text{ seu}$$

$$S = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} b - b}{\frac{100+p-100}{100}} = \frac{\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} b - b.}{p : 100}$$

$$S = \left(\frac{(100+p)^{n}}{(100)^{n}} b - b\right) \times \frac{100}{p}. \text{ Seu}$$

$$S = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} \times \frac{100b}{p} - \frac{100.b}{p}.$$

Igitur Capitale elapsis n post annis auctum seu $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} a + \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n} \times \frac{100.b}{p} - \frac{100.b}{p}$; etc.

Ex hac generali formula potest jam inveniri sive x, sive p, sive a, sive b, sive n, dummodo reliqua dentur.

Exemplum. 1) Proponatur hoc *Problema:* Quot annis accrescet Capitale 5 florenorum erga censum 4 flor. pro 100 usuris datum, usque ad 10000 florenos, si praeter censum adhuc annue 8 floreni Capitali addantur.

Resolutio. Hic est $a = 5$ flor. | $p = 4$ | $b = 8$ | $x = 10000$ | n quaeritur.

Cum $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a + \frac{100.b}{p}\right) - \frac{100.b}{p}$,

sit; erit hic rite substitutis valoribus:

$10000 = (\frac{104}{100})^n (5 + \frac{800}{4}) - \frac{800}{4}$; seu

$10000 = (\frac{104}{100})^n (5 + 200) - 200$; et

$10200 = (\frac{104}{100})^n \times 205$; ergo

$\frac{10200}{205} = (\frac{104}{100})^n$. Itaque

log. 10200 — log. 205 $= n$ (log. 104 — log. 100), et

inde $n = \frac{\text{log. } 10200 - \text{log. } 205}{\text{log. } 104 - \text{log. } 100}$. Est autem

log. 205 = 2, 3117539; et

log. 10200 = log. (102 $\times$ 100) = log. 102 + log. 100;

log. 102 = 2, 0086002

log. 100 = 2, 0000000

---

log. 10200 = 4, 0086002. Tum

log. 104 — log. 100 = 0, 0170333: ergo

$n = \frac{4.0086002 - 2.3117539}{0,0170333} = 99,61$ (ann.)

$n = 99$ ann. 7 mens. 13 diebus.

Exemplum. 2) Sit $a = 200$; $b = 16$; $p = 4$; erit

$$x = \left(\frac{104}{100}\right)^n \left(200 + \frac{100 \times 16}{4}\right) - \frac{100 \times 16}{4};$$ seu

$x = (\frac{104}{100})^n (200 + 400) - 400$. Ponamus jam $x = 100000$ florenis. Erit quaerendo n:

$$\frac{100000 + 400}{600} = \left(\frac{104}{100}\right)^n \text{; et}$$

$\frac{100400}{600} = (\frac{104}{100})^n$. Et

$\frac{1004}{6} = (\frac{104}{100})^n$. Ergo

log. 1004 — log. 6 $= n$ (log. 104 — log. 100); et

$$\frac{\text{log. } 1004 - \text{log. } 6}{\text{log. } 104 - \text{log. } 100} = n \text{. Seu}$$

$$\frac{2,2235824}{0,0170333} = n = 130 \text{ an.} + \frac{92534}{170333}.$$

§. 287. *Coroll.* Quodsi annue loco addendorum *b* florenorum, *b* floreni auferantur: tum *b* contrariam designationem obtinet, atque aequatio

$$x = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n \left(a + \frac{100.b}{p}\right) = \frac{100.b}{p} \text{ trans-}$$

formatur in sequentem:

$$\text{Incognita } x = \left(\frac{100 + p}{100}\right)^n \left(a - \frac{100.b}{p}\right)$$

$$+ \frac{100.b}{p}.$$

In hoc casu capitale aut crescet aut decrescet, prout nempe usurae annuae majores vel minores sumptibus annuis fuerint.

Exemplum. Cajus habet Capitale 10000 flor. erga censum 4 flor. pro 100 exstans; facit autem Cajus annue sumptum 600 flor, Quot annis jam nihilum habebit?

Resolutio. Quia $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n \left(a - \frac{100b}{p}\right)$ $+ \frac{100.b}{p}$; erit hic rite substitutis valoribus:

$x = o = \left(\frac{104}{100}\right)^n \left(10000 - \frac{60000}{4}\right) + \frac{60000}{4};$
$O = \left(\frac{104}{100}\right)^n (10000 - 15000) + 15000;$ seu
$O = \left(\frac{104}{100}\right)^n (-5000) + 15000;$ et
$5000 \left(\frac{104}{100}\right)^n = 15000,$ seu
$\left(\frac{104}{100}\right)^n = \frac{15000}{5000} = \frac{15}{5} = 3.$ Ergo
$n(\log. 104 - \log. 100) = \log. 3;$ inde

$$n = \frac{\log. 3}{\log. 104 - \log. 100};\ \text{seu}$$

$$n = \frac{0,4771212}{0,0170333} = 28,02\ (\text{ann.}).$$

§. 288. Cajus elapsis n post annis a florenos accipiendos habet; hos vendit numatione (pro numerata pecunia) erga censum p flor. pro 100, id est, pro $(100 + p)$ florenis, quos 1 anno serius accipiendos habet, semper tantum 100 flor, percipit. Quaeritur, quantum pro illis a florenis nunc solvendum sit? x floreni.

Resolutio. Cum pro $(100 + p)$ florenis 1 anno citius anticipatis (anticipando) tantum 100 flor. solvantur; valent a floreni 1 ann. citius anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^1 a$ florenos; nam

$$(100+p) : 100 = a : \left(\frac{100}{100+p}\right) a\ \text{flor.}$$

Porro hi $\left(\frac{100}{120+p}\right) a$ floreni valent 1 an. ci

tius anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$ fl.; nam

$(100+p):100 = \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a : \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$

florenos.

Hi $\left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a$ floreni 1 ann. anticipati valent

tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a$ florenos; nam

$(100+p):100 = \left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a : \left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a$

floren.

Igitur a flor. valent anticipati

1 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^1 a$ florenos.

a floreni 2 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$ fl.

a flor. 3 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a$ flor.

a flor. 4 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a$ flor.

a flor. 5 ann. citius tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^5 a$ flor.

Et ideo a floreni n annis citius anticipati valent

tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$ florenos.

Erit hic rursus $x = \left(\frac{100}{100+p}\right)^n \times a$ flor.; et

1) $\text{Log.}\, x = \log. a + n[\log. 105 - \log. (100+p)]$
2) $\text{Log.}\, a = \log. x - n[\log. 100 - \log. (100+p)]$
2) $\text{Log.}\, n = \frac{\log. x - \log. a}{\log. 100 - \log. (100+p)}$. Ubi ergo ſive x, ſive a, ſive n, ſive p inveniri poterit, ſi reliqua dantur.

Exemplum. Cajus accepturus eſt 100000 florenos elapſis poſt 10 annis; hos vendit erga deductum 8 flor, a 100 (deducendis 8 fl. a quovis 100). Quantum obvenit in numatione illi deductis deducendis? Reſponſ. 4 floreni.

Reſolutio. Cum $x = \left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$ flor.; erit hic ſubſtituendo valores:

$$x = \left(\frac{100}{108}\right)^{10} \times 100000 \text{; et}$$

$\log. x = \log. 100000 + 10 (\log. 100 - \log. 108)$.
Sed log. 100 = 2,0000000
log. 108 = 2,0334238, ſubtrah.:

log. 100 — log. 108 = — 0,0334238; ergo
10 (log. 100 — log. 108) = — 0,3342380; et
log. 100000 = 5,0000000; hinc addend.

log. x = 4,6657620.
Verum 4,6657620 = 3,6657620 + 1,0000000;
et log. 4632 = 3,6657620;
log. 10 = 1,0000000. Quare
4,6657620 = log. (4632 × 10) = log. 46320;
et x = 46320 florenis.

Scholion. Inventum erat in praecedenti problemate, quod 100000 floreni deductis deducendis 8 florenis a 100, ad 10 annos anticipati tantum dent 46320 florenos. Id comprobari potest per problema §. 285. Nam si acquirendi essent 100000 floreni decem annis; deberent 46320 floreni usurae dari ita, ut census annui semper iterum Capitali adderentur, et census 8 flor. pro 100 efficeret.

Est enim in $x = \left(\frac{100+p}{100}\right)^n a$ flor. (§. 285.)

substituendo; hic $x = \left(\frac{108}{100}\right)^{10} \times 46320$.

Ergo log. x = 10 (log. 108 — log. 100) + log. 46320; et 10 (log. 108—log. 100) = 0,3342380

log. 46320 = 4,6657620

log. x = 5,0000000.

5,0000000 = log. 100000; ergo

x = 100000 florenis.

§. 289. Cujus pro n annis annuum quaestum (tributum) a florenorum suo usui habet. Hunc vendit pro numatione deducendis p flor. a 100. Quantum anticipando pro hoc toto quaestu modo solvendum venit. x floreni.

Resolutio. Cum a floreni elapso 1 anno percipiendi, nunc anticipati tantum dent $\left(\frac{100}{100+p}\right) a$ floren.:

Illi, qui elapto 2 ann. percipiendi sunt, anticipati tantum dabunt $\left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a$ florenos;

elapſo 3 an. percipiendi: nunc anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a$ florenos; et itaque elapſis n annis percipiendi, nunc anticipati tantum $\left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$ florenos dabunt. Erit ergo $x =$

$$\left(\frac{100}{100+p}\right)^1 a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^2 a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^3 a$$

$$+ \left(\frac{100}{100+p}\right)^4 a + \left(\frac{100}{100+p}\right)^5 a + \cdots\cdots$$

$+\left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$. Igitur x aequale Summae omnium terminorum progreſſionis geometricae n terminos habentis, cujus terminus primus $\left(\frac{100}{100+p}\right)^1 a$; terminus ultimus $=\left(\frac{100}{100+p}\right)^n a$; et communis exponens $= \frac{100}{100+p}$.

At (§. 259.) $S = \frac{qw-a}{q-n}$; ſubſtituendo erit

$$x = \left[\left(\frac{100}{100+p}\right)^n \times \left(\frac{100}{100+p}\right) - \left(\frac{100}{100+p}\right) a\right]:$$

$\left(\frac{100}{100+p} - 1\right)$ ſeu additis exponentibus in numeratore, et reducendo in denominatore omnia ad eundem denominatorem, erit

$$x=\left[\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}a-\left(\frac{100}{100+p}\right)a\right]:$$

$$\left(\frac{100-100-p}{100+p}\right);$$

$$x=\left[\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}a-\left(\frac{100}{100+p}\right)a\right]:$$

$\left(\frac{-p}{100+p}\right)$; et multiplicando per inverſum denominatorem, tum dividendo quemvis terminum ſingulatim, et praeponendo poſitivum eſt:

$$x=\frac{\left[\left(100+p\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}a\right]}{-p}-$$

$$\frac{\left(100+p\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)a}{-p}$$

ſeu

$$x=\frac{100.a}{p}-\left(\frac{100+p}{p}\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}a.$$

Datis reliquis invenitur x, ſive a, ſive p, ſive n.

Exemplum. Emit quidam quaeſtum annuum (vel penſionem, tributum, vectigal etc.) 20000 florenorum ad 10 annos numerata pecunia, deducendis 4 flor. a 100. Quantum erit pro hoc toto quaeſtu deductis deducendis ſolvendum?

Resolutio. $x = \frac{100.a}{p} - \left(\frac{100+p}{p}\right)\left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1} a;$
substitutis valoribus erit hic:

$$x = \frac{20000.100}{4} - \left(\frac{104}{4}\right)\left(\frac{100}{104}\right)^{11} \times 20000.$$

Ergo $x = 500000 - (26)\left(\frac{100}{104}\right)^{11} \times 20000;$

seu $x = 500000 - \left(\frac{100}{104}\right)^{11} \times 520000.$ Verum
log. 100 — log. 104 = — 0,0170333; ergo
11 (log. 100 — log. 104) = — 0,1873663;
log. 520000 = 5,7160033, additis

log. 520000 + 11 (log. 100 — log. 104) = 5,5286370
5,5286370 = 3,5286370 + 2,0000000
3,5286370 = log. 3378
2,0000000 = log. 100; hinc
5,5286370 = log. 337800. Et igitur
$x = 500000 - 337800 = 162200$ flor.

Scholion. 20000 × 10 = 200000. Et
200000 — 162200 = deductui ablato
= 37800 flor.

Caput XIII.

De Combinationibus.

§. 290. *Combinatio* est methodus inveniendi omnes conjunctiones possibiles, diversas simul plurium rerum, quae binae aut binae, ternae aut ternae, quatuor et quatuor etc. simul accipiuntur, sine aut cum respectu ad diversitatem etiam

loci, quem res combinatae occupare possunt. quod a Problemate dato dependet.

§. 291. *Problema.* Invenire numerum Combinationum, quae fieri possunt cum 24 Alphabeti litteris 2 et 2, 3 et 3, et ita porro 24 et 24 simul accipiendo.

Resolutio et Demonstratio. Combinatum *a* secum ipso dat *aa*, combinatum cum *b* dat *ab*, cum *c* dat *ac* etc.. ergo erunt 24 combinationes litterae *a*. Eadem methodo littera *b* dat 24 combinationes. et ita operando cum reliquis advertitur, quod littera quaelibet primo loco posita 24 diversis vicibes cum reliquis combinari possit; dabunt ergo omnes 24 simul binarum combinationes diversas 24$\times$24 seu 576.

Si jam Combinationes trium accipiantur, hoc est, ad quamlibet priorem adjungatur *a*, erit prima *aaa*, secunda *aab*, tertia *aac* etc., ergo solum *a* dabit 24$\times$24 seu 576 novas trium litterarum combinationes: quod de *a* demonstratur, de omnibus 24 litteris, ergo de *b*, *c*, *d* etc. dici potest, quaelibet enim 576 seu (24$\times$24) novas combinationes trium litterarum dabit, unde facile concluditur, combinationes omnes seu voces trium litterarum fore 576$\times$24 seu (24$\times$24)$\times$24 hoc est 13824.

Si quatuor litterae conjungantur; fit ut prius; *a* prioribus adjunctum dat novas 13824 quatuor litterarum combinationes; idem cum omnibus 24 litteris contingit, combinationes ergo quatuor litterarum sunt 13824$\times$24.

His jam praemissis advertitur; quod ulteriores combinationes semper obtineantur multiplicando summam praecedentium combinationum per 24. Constituunt itaque combinationes progressionem geometricam, in qua primus terminus est 576 combinatio duarum, trium secundus, quatuor tertius, et ultimus denique combinatio viginti trium; communis exponens vero 24, et numerus terminorum seu $n = 23$, qui unitate minor esse debet, quam numerus litterarum. Facile jam erit ex formulis praecedentibus (§. 256. Cor. 2. et §. 260.) invenire terminum ultimum et demum summam omnium. Nempe ultimus terminus $aq^{n-1} = 576 \times 24^{22}$. Summa omnium terminorum seu

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{576 \times 24^{23} - 576}{23}, \text{ seu}$$

$$S = \frac{(24 \times 24) \times 24^{23} - 576}{23} = \frac{24^{25} - 576}{23}.$$

Coroll. 1) Quodsi etiam litterae singulae accipiantur, sine aliis, seu, *a*, *b*, *c*, etc. solitarie etiam ponantur; erit terminus primus $a = 24$; et secundus seu $aq = 24^2$, et tota summa seu

$$S = \frac{24 \times 24^{24} - 24}{23}, \text{ seu } S = \frac{24^{25} - 24}{23}.$$

Coroll. 2) Quodsi numerus pauciorum combinationum desideraretur; cessandum erit in eo termino, qui datas combinationes indicat. Ita numerus combinationum 2 et 2, 3 et 3; 4 et 4; 5 et 5, 6 et 6 simul accipiendo, cum haec combinatio quintum terminum det, erit aq^4.

§. 292. *Problema.* Invenire numerum combinationum, dum certus tantum numerus quantitatum ſumitur, et quaevis toties ad primum locum ponitur, quot quantitates ſumuntur.

Reſolutio et Demonſtratio. Combinando a et b binos et binos dat 4 combinationes, ſeu potentiam ſecundam numeri quantitatum combinandarum;

aa	bb
ab	ba

a, b, c binae et binae ſumptae dant 9 combinationes, vel rurſus ſecundam potentiam numeri quantitatum combinandarum;

aa	bb	cc
ab	ba	ca
ac	bc	cb

a, b, c, d, dant 16 combinationes etc. Ergo combinatio petita oſtendit potentiam ad quam numerus quantitatum combinandarum elevatur.

Ergo a, b, c, terni comparati dant 27 combinationes, hoc eſt tertiam potentiam numeri (3) combinandarum quantitatum. a, b, c, d, terni combinati dant tertiam potentiam numeri 4; etc. Sit ergo numerus quantitatum $= m$, combinatio petita $= n$; erit numerus combinationum quaeſitus $= m^n$.

Si e. g. quantitatum 6 quaternarii petuntur; erunt hi $= 6^4 = 1296$. Sint quantitates 9; erunt earum quaternarii $= 9^4 = 6561$. Si quantitates 100, combinatio ternariorum, erit numerus combinationum $= 100^3 = 1000000$.

§. 293. *Problema.* Invenire numerum variationum localium (permutationum) quantitatum determinatarum.

Resolutio et Demonstratio. *a* et *b* duas: *ab*, *ba*, admittit; *a*, *b*, *c* sex: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*, admittit, hoc est priores variationes 2 cum numero novo quantitatum 3 multiplicatae; *a*, *b*, *c*, *d*, admittit 24 variationes, hoc est priores 6 multiplicatae per novas 4; *a*, *b*, *c*, *d*, *e* admittit 120 variationes, hoc est 24 priores ductae in novas 5. Sequitur jam ex his, ut habeantur subsequae variationes, priores semper per numerum sequentem esse multiplicandas.

Generatim igitur ut habeatur numerus variationum, quas habere potest quiscunque numerus datus, scribatur progressio arithmetica, et infra illam producta, methodo superius exposita: V. g.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; etc.
1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800; etc.

Seu ita scribendo:

1	2	3	4	5	6	etc.
1	1×2	$1\times2\times3$	$1\times2\times3\times4$	$1\times2\times3\times4\times5$	$1\times2\times3\times4\times5\times6$	etc.
1	2	6	24	120	720	etc.

Ergo generaliter numerus permutationum localium $= N$ determinatarum (n) quantitatum erit $= 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10 \cdots \times n$.

Exemplum. Quaeritur, quoties 8 personae tabulae assidentes mutari possint. Accipiatur productum

infra 8 positum, et habebuntur 40420; vel sumatur productum ex octo primis numeris naturali serie crescentibus N = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. = 40320.

§. 264. *Problema.* Invenire numerum combinationum, reipsa differentium, et dum nulla secum ipsa comparatur: V. g. 6 numerorum 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Resolutio et Demonstratio. 1 comparata cum reliquis dat 5 combinationes binariorum, scilicet: 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 1, 5 | 1, 6; 2 comparatus cum reliquis dat 4, cum 1 enim jam comparata est, fiuntque 2, 3 | 2, 4 | 2, 5 | 2, 6; 3 comparatus cum reliquis dat 3, cum 1 enim et 2 jam comparatus est, et fiunt 3, 4 | 3, 5 | 3, 6; 4 dat 2 nempe 4, 5 | 4, 6; 5 dat 1, nempe 5, 6. Ergo combinationes binariorum constituunt progressionem arithmeticum 5, 4, 3, 2, 1, ubi maximus terminus est 5, et minimus 1, numerus terminorum = 5, cujus summa habetur ex formula (§. 200.) $S = (a + w)\frac{n}{2}$; hoc est $S = (5 + 1)\frac{5}{2}$. Sed $(5 + 1)\frac{5}{2}$ $= \frac{6.5}{2} = \frac{5 \times 6}{1 \times 2}$ hoc est: ultimi duo termini dati inter se multiplicati et per primos duos divisi.

1) Ergo Summa binariorum habetur, si quorumcunque numérorum datorum ultimi duo multiplicentur, et per factum primorum duorum dividantur. Id est, si quantitatum combinandarum numerus accipiatur generaliter = *m*, erunt combinationes binariorum $= \frac{m(m-1)}{1.2}$.

2) Ergo terni ſeu combinatio trium habebitur, ſi tres ultimi inter ſe multiplicentur, et per factum primorum trium dividantur, ergo combinationes ternariorum erunt $= \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3.}$

Combinatio quatuor numerorum habebitur, ſi quatuor ultimi multiplicentur, et per factum quatuor primorum dividantur, Erunt ergo combinationes quaternariorum =

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.}$$

Et Combinationes quinariorum =

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.}$$

Igitur combinationes n numerorum erunt:

$$N = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \text{-----} [m-(n-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ \text{------------},\ n.};$$

ubi autem $n < m$ eſſe debet.

Coroll. 1) Si haec conferantur cum iis, quae dicta ſunt de elevatione ad potentias, videbimus, quod haec producta eadem omnino ſint cum coefficientibus potentiarum incipiendo a tertio termino. Igitur combinationes numerorum m aequantur coefficientibus potentiae $(a+b)^m$ incipiendo a tertio termino. (Quod in theoremate binomiali demonſtratur).

Coroll. 2) Quodsi igitur 90 Numeri combinandi fuerint; erunt numerorum combinationes binariorum (quae vulgo *ambi* vocantur) $\frac{90 \times 89}{1.\ 2.}$ $= 4005$; combinationes *trium* $\frac{90 \times 89 \times 88}{1.\ 2.\ 3.} =$ 117480; combinationes *quatuor* numerorum sunt $\frac{90 \times 89 \times 88 \times 87}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 2555190$. Combinationes *quinariorum* erunt $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot}$ 43949268.

Typis Feichtingerianis.

Corrigenda.

Pag.	*Lin.*	*Errata.*	*Corrige.*
26.	14.	Summi	Sumi
48.	1.	$a : n = q$	*Si* $a : n = q$
49.	1.	et loco n	et *r* loco *n*
52.	22.	$4 \times 3 \times$	$4 \times 3 =$
55.	ultim.	earum	eorum
83.	11.	ax	ex
85.	22.	operat,	operatur
100.	8.	$a - a = a$	$a - a = o$
100.	31.	$\times 42a$	$= 42a$
109.	23.	divitur	dividitur
111.	16.	dictur	dicitur
112.	19.	$3 + 2$	3×2
115.	24.	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$
122.	11.	$\times b \times dbq$	$\times b = dbq$
123.	5.	hanc	hunc
141.	3.	$\sqrt[4]{a^5}$	$\sqrt[6]{a^4}$
143.	ult.	$\sqrt[2]{7^2}$	$\sqrt[2]{7}$
150.	22.	444	144
155.	ult,	quadratum	quadratam
164.	18.	hoc	,ſi hoc
177.	12.	$\frac{3}{10000}$	$\frac{4}{10000}$
190.	3.	ſecundum	ſecundorum
195. 97.	7. 22.	operatur	operator
232.	7.	et	ut
261.	23.	$q - b$	$(q - b) : (a - b)$
262.	9.	$x \times$	$x =$